Elementi di Logica Matematica
Primo Test del 17 Marzo 2005

Cognome e nome:..

Numero di matricola:..

E-mail (per eventuali comunicazioni):..

Tutte le risposte devono essere giustificate con una dimostrazione o con un controesempio.
Nell'esercizio 2 si possono assumere le proprietà di ordine totale stretto di $(\omega, \in)$.
Buon lavoro.

Esercizio 1.

1. Dimostrare che vale l'implicazione $(\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(y)) \to (x \in y)$. Vale l'implicazione inversa?
2. Stabilire se ciascuna delle seguenti quattro proprietà vale o no.

   (a) $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$; (b) $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$; (c) $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$; (d) $\mathcal{P}(\bigcup X) = \{\mathcal{P}(x) \mid x \in X\}$.

Esercizio 2. Per ogni insieme x, denotiamo $\widehat{x} = x \cup \{x\}$.

1. Dimostrare che ω è transitivo, cioè che se $n \in \omega$ e $x \in n$, allora $x \in \omega$;
2. Dimostrare che $\forall n, m \in \omega \quad (\widehat{n} \in \widehat{m}) \to (n \in m)$;
3. Dimostrare che $(\widehat{x} \in \omega) \to (x \in \omega)$.

Esercizio 3. Potendo usare soltanto gli assiomi dell'*insieme vuoto*, della *coppia* e della *potenza*, si può costruire un insieme con 5 elementi? E potendo usare soltanto gli assiomi dell'*insieme vuoto*, della *potenza* e della *unione*?

Esercizio 4. Siano A, B, C tre insiemi con B e C disgiunti. Dimostrare che $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$.

Esercizio 5.

1. Sia $[\mathbb{R}]^\omega = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid |X| = |\mathbb{N}|\}$. Dimostrare che $|[\mathbb{R}]^\omega| = |\mathbb{R}|$.
2. Sia $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ è crescente}\}$. Dimostrare che $|\mathcal{F}| = |\mathbb{R}|$.
3. Sia $\mathcal{G} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g \text{ è non decrescente}\}$. Dimostrare che $|\mathcal{G}| = |\mathbb{R}|$.

   [Sugg. Dimostrare prima che ogni $g \in \mathcal{G}$ ha al più una infinità numerabile di punti di discontinuità.]