Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

PROVA SCRITTA di ANALISI MATEMATICA II

28 giugno 2014

1. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = -\frac{x^4}{2} + x^2 - y^2$$

   (i) Determinare i punti stazionari di f, e classificarli (cioé dire se si tratta di selle, massimi o minimi locali).

   (ii) Determinare $\sup f(x,y)$ e $\inf f(x,y)$.

   (iii) Trovare massimi e minimi di f sull'insieme $D := \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \le 2\}$.

2. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il solido definito da

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + z^2 - 1 \le y \le \sqrt{1 - x^2 - z^2}\},$$

   e sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}(x,y,z) := (\ x \sin y,\ 3xyz + \cos y,\ z+2)$,

   (i) Calcolare il volume di V.

   (ii) Calcolare il flusso $\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{dS}$, dove $\mathbf{n}$ denota il versore normale esterno a V.

   (iii)* Calcolare l'area della superficie ∂V.

3. Sia

$$\mathbf{F}_\alpha(x,y) = \left(\frac{x\cos\alpha + y \sin\alpha}{x^2 + y^2}, \quad \frac{-x\sin\alpha + y\cos\alpha}{x^2+y^2} \right).$$

   (a) Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale $\mathbf{F}_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ risulta essere conservativo.

   (b) Per tali valori di α si determini il potenziale $U : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ in modo che si abbia $U(0,2) = 1$.

In questa seconda parte le risposte ad ogni domanda devono essere giustificate. Risposte giuste ma non giustificate non saranno considerate valide. È consentito l'utilizzo di libri, appunti e calcolatrice (non grafica). Qualunque altra apparecchiatura elettronica va lasciata spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma è considerata *tentativo di frode* e comporta automaticamente l'annullamento della prova

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
PROVA SCRITTA di ANALISI MATEMATICA II
$\boxed{\text{28 giugno 2014}}$

1. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = y^4 + x^2 - 2y^2$$
   (i) Determinare i punti stazionari di f, e classificarli (cioé dire se si tratta di selle, massimi o minimi locali).
   (ii) Determinare $\sup f(x,y)$ e $\inf f(x,y)$.
   (iii) Trovare massimi e minimi di f sull'insieme $D := \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il solido definito da
$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : y^2 + z^2 - 1 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2}\},$$
   e sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}(x,y,z) := (xyz + \cos x, \ y \sin x, \ z + 3)$,
   (i) Calcolare il volume di V.
   (ii) Calcolare il flusso $\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{dS}$, dove $\mathbf{n}$ denota il versore normale esterno a V.
   (iii)* Calcolare l'area della superficie ∂V.

3. Sia
$$\mathbf{F}_\alpha(x,y) = \left(\frac{x \sin\alpha + y \cos\alpha}{x^2 + y^2}, \quad \frac{-x \cos\alpha + y \sin\alpha}{x^2 + y^2} \right).$$
   (a) Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale $\mathbf{F}_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ risulta essere conservativo.
   (b) Per tali valori di α si determini il potenziale $U : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ in modo che si abbia $U(3,0) = 0$.