Esercizio 1 (A)

a) La funzione è polinomiale e dunque infinitamente derivabile. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (-2x^3+2x,\ -2y)$$

da cui

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff y=0 \text{ e } x^3 = x \iff$$

$$x=0,\ y=0 \quad \text{o} \quad x=\pm 1,\ y=0.$$

Inoltre

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -6x^2+2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che implica: $(0,0)$ punto di sella

e

$$H(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che implica: $(\pm 1, 0)$ punti di massimo locale

b) Poiché

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = \lim_{y\to\pm\infty} (-y^2) = -\infty$$

si ha

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$$

Poiché poi

$$|x| \geq 2 \Rightarrow x^2/2 - 1 \geq 1 \Rightarrow f(x,y) = -x^2\left(\frac{x^2}{2}-1\right) + $$

$$-y^2 \leq -x^2 - y^2 \leq 0$$

e

$|x| \leq 2 \Rightarrow -\frac{x^4}{2} + x^2 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow f(x,y) \leq$
$\leq 4 - y^2 \leq 4$.
Dunque f è limitata superiormente ed i punti $(\pm 1, 0)$ trovati precedentemente sono pertanto di massimo assoluto. Cioè

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \max_{\mathbb{R}^2} f = f(\pm 1, 0) = 1/2 .$$

c) I punti $(\pm 1, 0)$ appartengono a D. Quindi $\max_D f = \max_{\mathbb{R}^2} f = 1/2$. Poiché $(0,0)$ è di sella e appartiene a $\mathring{D}$, non può essere punto di minimo assoluto. Occorre pertanto esaminare ∂D, usando, ad esempio, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si ha

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -x^4/2 + x^2 - y^2 - \lambda(x^2+y^2-2)$$

da cui

$$\nabla \mathcal{L} = \Big(-2x^3 + 2x - 2\lambda x, \ -2y - 2\lambda y,$$
$$-(x^2+y^2-2)\Big) = (0,0,0) \iff$$

$y = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$ o $x = 0$ e $y = \pm\sqrt{2}$

oppure, dividendo per x e per y,

$$\begin{cases} 1-x^2-\lambda=0 \\ \lambda+1=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

che non fornisce nuove soluzioni. D'altra parte

$$f(\pm\sqrt{2},0)=0 \qquad e \qquad f(0,\pm\sqrt{2})=-2.$$

Se ne conclude che

$$\min_D f = -2.$$

(B)

a) $\nabla f(x,y) = (2x,\ 4y^3-4y) = (0,0) \Leftrightarrow$

$$x=0,\ y=0 \qquad o \qquad x=0,\ y=\pm 1.$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ punto di sella}$$

$$H(0,\pm1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,\pm1) \text{ punti di minimo locale}$$

b) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$

$|y| \geq \sqrt{2} \Rightarrow y^4 - 2y^2 = y^2(y-2) \geq 0 \Rightarrow$

$f(x,y) \geq x^2 \geq 0$

$|y| \leq \sqrt{2} \Rightarrow -2y^2 \geq -4 \Rightarrow f(x,y) \geq y^4 + x^2 - 4 \geq$

$\geq -4 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} f \geq -4 \Rightarrow$

$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = f(0, \pm 1) = -1.$

c) $(0, \pm 1) \in D \Rightarrow \min_D f = \min_{\mathbb{R}^2} f = -1.$

$(0,0)$ di sella $\Rightarrow \max_D f = \max_{\partial D} f.$

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y^4 + x^2 - 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

$\nabla \mathcal{L} = (2x - 2\lambda x, 4y^3 - 4y - 2\lambda y, x^2 + y^2 - 4) =$

$= (0,0,0) \Leftrightarrow x = 0$ e $y = \pm 2$ o

$y = 0$ e $x = \pm 2$, oppure

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 0 \\ 2y^2 - (2+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ o $x = -\sqrt{5/2}$, $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$f(0, \pm 2) = 8$, $f(\pm 2, 0) = 4$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \mp\sqrt{\frac{3}{2}}\right) =$

$= 7/4 \Rightarrow \max_D f = 8.$