Prova scritta di EAM – 3 settembre 2010

Esercizio 1

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_n+2)} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Poniamo $f(x) := \sqrt{x(x+2)}$; f è continua e ben definita su $[0,+\infty[$

(i) • Per $x \geq 0$, (1) $\boxed{f(x) \geq \sqrt{x^2} = x}$, in particolare (2) $\boxed{f([1,+\infty[) \subseteq [1,+\infty[}$

• Pertanto possiamo dimostrare per induzione che, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(3) $\boxed{a_n \text{ è ben definita e } a_n \geq 1 \quad (*)_n}$

– $a_0 = 1 \geq 1$ $\quad (*)_0$ è verificata

– se $a_n \in [1,+\infty[$ allora $f(a_n)$ è ben definita e sta nell'intervallo $[1,+\infty[$, da cui la tesi.

• (4) $\boxed{a_n \text{ è crescente;}}$

infatti $a_{n+1} = f(a_n) \overset{\text{per (1)}}{\geq} a_n$

(ii) • $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\text{per (4)}}{=} \sup\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} := L \in [1,+\infty]$

. se fosse $L < +\infty$ si avrebbe

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(L)$$

per la continuità di f

Ma l'equazione $L = f(L)$ non ha soluzioni su $[1,+\infty[$; pertanto deve essere $\boxed{L = +\infty}$ (5)

- $$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n(a_n+2)} - a_n = \frac{2a_n}{\sqrt{a_n(a_n+2)} + a_n}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+2/a_n} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(perché $a_n \to \infty$ per $n\to\infty$)

$$\boxed{\frac{1}{n} a_n = \frac{1}{n} a_0 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(a_{k+1} - a_k)}_{w_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$ 6

(perché se $w_n \to L$ anche $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w_k \to L$)

iii) [Facoltativo] $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a_n}$$

- Studiamo innanzitutto l'assoluta convergenza (ovvero il comportamento di $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{a_n}$)
  - Se $x=0$ la serie è nulla (quindi converge ;))
  - Per il criterio del rapporto

$$\frac{|x|^{n+1}/a_{n+1}}{|x|^n/a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot |x| = \frac{1}{\sqrt{1+2a_n}} \cdot |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

Pertanto se $|x|<1$ la serie converge (assolutamente).

Se $|x|>1$ la serie non converge perché l'addendo non è infinitesimo

Se $x=1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge, perché $\frac{1}{a_n} \geq 0$ e $\frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{n}$ (per 6)

Se $x=-1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge perché sono verificate tutte le ipotesi del criterio di Leibniz

Correzione prova scritta di E. A. M. del 3/09/2010

Esercizio 2 Data

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} - 1 - x \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(i) studiarne proprietà di continuità e derivabilità;

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R} - \{0\})$ perché composizione, somma e prodotto di funzioni ($t \mapsto e^{t}, |t|, t, \ln t$) che sono infinite volte derivabili con continuità sull'aperto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Poiché $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{e^{x}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ (noto)}}} - 1 - \underbrace{x \ln|x|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ (limite notevole)}}} = 1 - 1 - 0 = 0 = f(0)$

si ha che f è continua anche in $x = 0$ e quindi $f \in C^{0}(\mathbb{R})$

CONTINUITÀ DI f

Utilizzando le formule di composizione di derivate note si ottiene subito che per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ valgono:

$$(*) \qquad f'(x) = e^{x} - \ln|x| - 1 \qquad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(**) \qquad f''(x) = e^{x} - \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

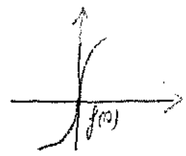
Passando al limite per $x \to 0^{\pm}$ in $(*)$ si ha

$$\lim_{x \to 0^{+}} f'(x) = \lim_{x \to 0^{-}} f'(x) = 1 - (-\infty) - 1 = +\infty$$

DERIVABILITÀ

Ne deriva (applic. del teo di Lagrange viste ad esercit.)

che $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$ per cui $\nexists f'(0)$

In particolare $x=0$ è un punto di non derivabilità, a "tangente verticale", i.e. 

Conclusione: f è derivabile con continuità in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

f NON è derivabile in $x=0$

(i) tracciarne un grafico approssimato;

Studiamo limiti di f a $\pm\infty$, zone di monotonia e convessità.

Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \Big(1 - \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\downarrow 0} - \underbrace{\frac{x \ln|x|}{e^x}}_{\downarrow 0} \Big) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 1 - (-\infty)(+\infty) = +\infty$$

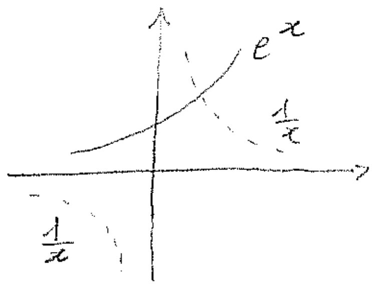
Chiaramente non ci sono asintoti obliqui a $\pm\infty$ visto che f diverge a $+\infty$ come e^x ed a $-\infty$ come $-x \cdot \ln|x|$.

Studiamo il segno di $g(x) = f'(x) = e^x - 1 - \ln|x|$ definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $g''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$ definite su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Poiché $g'' > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ g è convessa, separatamente, negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$

$g' > 0$ su $(-\infty, 0)$ mentre su $(0, +\infty)$

si ha che esiste ! $x_0 \in (0,1)$ tale che



$g'(x) > 0$ su $(x_0, +\infty)$

$g'(x) < 0$ su $(0, x_0)$

x_0 è definito come l'unica soluzione di $g'(x_0) = 0$

ossia $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$

(per dimostrarlo basta notare che g' è strett. crescente su $(0, +\infty)$

grazie a $g'' > 0$, $g' \to -\infty$ per $x \to 0+$, $g'(1) > 0$)

Mettendo insieme tutte le informazioni su g si ottiene:

1) g strett. crescente su $(-\infty, 0)$ con $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, $g(x) \xrightarrow[x \to 0-]{} +\infty$

$\Rightarrow \exists ! \ \bar{x} < 0$ t.c. $g(\bar{x}) = 0$ (definito da $e^{\bar{x}} - 1 = \ln|\bar{x}|$)

$g > 0$ su $(\bar{x}, 0)$, $g < 0$ su $(-\infty, \bar{x})$

2) $g(x_0) = \min\limits_{(0,+\infty)} g(x) \Rightarrow g(x) \geq g(x_0) = e^{x_0} - 1 - \ln x_0 > 0$

$\forall \ x > 0$ $\quad$ ($x_0 \in (0,1) \Rightarrow \ln(x_0) < 0$)

Poiché $g = f'$ si traducono le informazioni 1) e 2) su f:

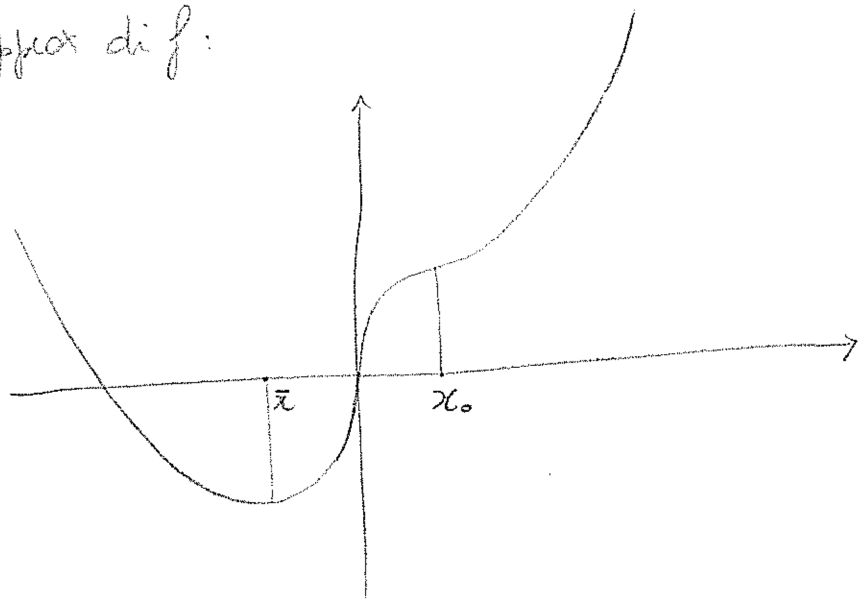
$\Rightarrow$ f decrescente su $(-\infty, \bar{x})$

f crescente su $(\bar{x}, 0)$ $\quad$ $\bar{x}$ pto di minimo per f

f strett. crescente su $(0, +\infty)$ con pto di flesso in x_0

f convessa su $(-\infty, 0)$ e su $(x_0, +\infty)$, concava su $(0, x_0)$

Grafico approx di f:



(ii) (a) è già stato dimostrato che $f'(x) \geq f'(x_0) > 0$ su $(0, +\infty)$.

f è una funzione continua su $[0, +\infty)$, derivabile su $(0, +\infty)$ con $f' > 0$

$$\Rightarrow \underset{e^x - 1 - x\ln x}{\underset{\shortparallel}{f(x)}} \geq f(0) = 0 \qquad \forall x \geq 0$$

(ii) (b) f è una funzione continua su $[0, 1]$ e derivabile su $(0, 1]$

è noto (conseg. di Lagrange) che f è Lipschitziana su $[0, 1]$

$\Longleftrightarrow$ $|f'|$ è limitata su $(0, 1]$

Dato che $f'(x) \xrightarrow[x \to 0+]{} +\infty$ f NON è Lipschitz su $[0, 1]$.

Dim alternativa di (a): $\begin{cases} e^x \geq 1 + x & \forall x \geq 0 \\ x \geq \ln x & \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow e^x \geq 1 + \ln x$

$\Rightarrow f' \geq 0$ su $(0, +\infty) \Rightarrow f$ crescente su $(0, +\infty) \xRightarrow{f \in C^0([0, +\infty))} f(x) \geq f(0) = 0$

<u>ERRORE COMUNE</u>: $D(\ln|x|) = \dfrac{1}{x} \neq \dfrac{1}{|x|}$.

EAM del 03-09-2010

• Studiare la convergenza di $\int_0^\infty \left(1 - x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \ln x$

$\boxed{\text{SOL}}$.

Studiamo la convergenza su $[0,1]$.
La disuguaglianza elementare

$$\operatorname{sen} y \leq y \quad \forall y \geq 0$$

implica

$$x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x > 0$$

e quindi

$$\left|1 - x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| |\ln x| \leq 2 |\ln x| \quad \forall x > 0.$$

Siccome $\int_0^1 |\ln x| dx$ converge si deduce la convergenza di $\int_0^1 \left(1 - x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \ln x \, dx$.

Studiamo la convergenza su $[1,\infty)$.
Usando la formula di Taylor per $\operatorname{sen} y$ si deduce

$$x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

quindi

$$1 - x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Usando il teo. del confronto si deduce che $\int_1^\infty \left(1 - x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \ln dx$ converge se converge $\int_1^\infty \frac{|\ln x|}{x^2} dx$.
La convergenza di quest'ultimo integrale si può dedurre dalla seguente disuguaglianza

$$\frac{|\ln x|}{x^2} \leq \frac{C}{x^{\frac{3}{2}}} \quad \forall x \geq 1.$$

EAII del 03.09-2010

- Calcolare $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$.

$\boxed{\text{Sol}}$ Si tratta di un integrale improprio essendo $\left(\sqrt{x-x^2}\right)^{-1}$ illimitata in 0 ed in 1.

Quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx .$$

Con il cambio di variabile $x = t^2$

si ha

$$\int_\epsilon^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = 2\int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{1-\epsilon}} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-t^4}} = 2\int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{1-\epsilon}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= 2\left[\arcsin\sqrt{1-\epsilon} - \arcsin\sqrt{\epsilon}\right].$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = 2\lim_{\epsilon \to 0}\left[\arcsin\left(\sqrt{1-\epsilon}\right) - \arcsin\sqrt{\epsilon}\right]$$

$$= 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$$

∎