Compito di <u>ANALISI FUNZIONALE</u> – 11 gennaio 2008

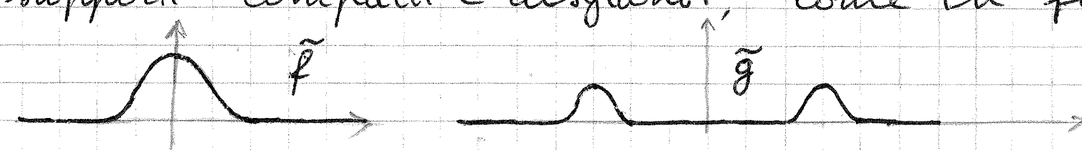
(1.a) $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}, \hat{g} \in C_0(\mathbb{R})$; f a supporto compatto $\Rightarrow \hat{f}$ analitica

$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} = 0$. Di conseguenza $\hat{f}(\xi) \neq 0 \Rightarrow \hat{g}(\xi) = 0$

Alternativa: <u>o</u> $\hat{f} \equiv 0$ (e quindi $f = 0$ q.o.)

<u>oppure</u> $\hat{f}$ ha zeri isolati e $\hat{g}$ si annulla fuori da $Z := \{\xi : \hat{f}(\xi) = 0\}$ (anzi, per continuità $\hat{g} \equiv 0$) e quindi $g = 0$ q.o.

(1.b) No. Siano $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ due funzioni C^∞ pari con supporti compatti e disgiunti, come in figura



Per la formula di inversione esistono funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ tali che $\hat{f} = \tilde{f}$ $\hat{g} = \tilde{g}$. Per tali f e g si avrà che $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} = \tilde{f} \cdot \tilde{g} = 0$

e quindi $f * g = 0$

(N.B.: prendere $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ pari garantisce che f e g abbiano valori reali)

(2.a) È immediato verificare che se f e $g \in G$ anche $f + g \in G$.
Sia $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di elementi di G t.c. $g_n \to f$ in $L^1([0,1])$

A meno di passare ad una sottosuccessione possiamo supporre $g_n \to f$ q.o. Dato che $\mathbb{Z}$ è un insieme discreto ciò implica che f (fuori da un insieme di misura nulla) assume solo valori interi.
Quindi $f \in L^2([0,1], \mathbb{Z})$.