

# Analisi Matematica I - Secondo Compitino

19 Dicembre 2005 - Fila 1

**Esercizio 1.** Data l'applicazione

$$f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

determinare  $f(i\mathbb{R})$  e  $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$ , dove  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  è il cerchio unitario.

SOLUZIONE. Osserviamo che per ogni  $t \in \mathbb{R}$  abbiamo

$$1 + it = \sqrt{1+t^2} e^{i \arctan t}$$

pertanto

$$f(it) = \frac{e^{i \arctan t}}{e^{i \arctan(-t)}} = e^{2i \arctan t}.$$

Ne segue che  $f(i\mathbb{R}) = e^{i] -\pi, \pi[} = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ .

Ora osserviamo che

$$\mathbb{U} \setminus \{1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in ]0, 2\pi[ \}$$

e consideriamo

$$f(e^{i\theta}) = \frac{(1 + e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^2} = \frac{2i \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} i.$$

Osserviamo che la funzione  $\theta \mapsto \sin \theta (1 - \cos \theta)^{-1}$  è continua su  $]0, 2\pi[$  e ricordando che  $\sin \theta = \theta + o(\theta)$  e  $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + o(\theta^2)$ , per  $\theta \rightarrow 0$ , si hanno i limiti

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = +\infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow 2\pi^-} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = -\infty.$$

Pertanto l'immagine di tale funzione corrisponde all'insieme  $\mathbb{R}$ , ovvero  $f(\mathbb{U} \setminus \{1\}) = i\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** (a) Dimostrare che la derivata  $n$ -esima della funzione

$$f(x) = e^{x^3-x}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) e^{x^3-x},$$

con  $p_n$  polinomio.

(b) Determinare al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x).$$

SOLUZIONE. (a) Dimostriamo per induzione che

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) e^{x^3-x},$$

con  $p_n$  polinomio. Per  $n = 0$  è sufficiente porre  $p_0 = 1$ . Se la formula è vera per  $n$ , si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (p_n'(x) + (3x^2 - 1)p_n(x)) e^{x^3-x}.$$

Quindi basta porre

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) + (3x^2 - 1)p_n(x), \quad (1)$$

che è un polinomio (la derivata di un polinomio è un polinomio, e l'insieme dei polinomi forma un anello).

(b) Risulta

$$e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x) = x^\lambda p_n(x).$$

Dalla formula (1) si deduce che il polinomio  $p_{n+1}$  ha il grado di  $p_n$  più due. Insieme al fatto che  $p_0 = 1$ , si trova che  $p_n$  ha grado  $2n$ . Sempre da (1), il coefficiente del termine di grado  $2(n+1)$  in  $p_{n+1}$  è pari a 3 volte il coefficiente del termine di grado  $2n$  in  $p_n$ . Insieme al fatto che  $p_0 = 1$ , si trova che il coefficiente del termine di grado  $2n$  in  $p_n$  è  $3^n$ . Concludiamo quindi che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^3+\lambda \log x} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < -2n, \\ +\infty & \text{se } \lambda > -2n, \\ 3^n & \text{se } \lambda = -2n. \end{cases}$$

**Esercizio 3.** (a) Dato un intero positivo  $n$ , dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 2nx - 3 \sin x,$$

ha un unico punto di minimo  $x_n$ .

(b) Dimostrare che  $x_n \rightarrow \pi/2$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

(c) Determinare costanti  $a$  e  $b$  tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a n^{-1/2} + b n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

**SOLUZIONE.** (a) La funzione  $f_n$  è derivabile, e la sua derivata vale

$$f'_n(x) = 1 + \tan^2 x - 2n - 3 \cos x.$$

La funzione  $f'_n$  vale  $-2n - 2$  in  $0$ , ed il suo limite per  $x \rightarrow \pi/2$  (da sinistra) vale  $+\infty$ . Essendo una funzione continua, per il teorema degli zeri la funzione  $f'_n$  possiede almeno uno zero in  $]0, \pi/2[$ . Inoltre  $f'_n$  è strettamente crescente su  $[0, \pi/2]$ , poichè somma di funzioni crescenti di cui almento una (ad esempio  $\tan^2$ ) strettamente crescente. Deduciamo che esiste un unico  $x_n \in ]0, \pi/2[$  tale che  $f'_n$  è negativa su  $[0, x_n[$ , nulla in  $x_n$ , e positiva su  $]x_n, \pi/2[$ . Quindi  $f_n$  è strettamente decrescente su  $[0, x_n]$  e strettamente crescente su  $[x_n, \pi/2[$ . In particolare,  $x_n$  è l'unico punto di minimo di  $f_n$ .

(b) Da  $f'(x_n) = 0$  e dal fatto che il coseno è limitato deduciamo che

$$\tan^2 x_n = 2n - 1 + 3 \cos x_n = 2n + O(1), \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

da cui, tenendo conto del fatto che la tangente è bigettiva da  $[0, \pi/2[$  su  $[0, +\infty[$ , otteniamo

$$x_n = \arctan \sqrt{2n + O(1)}.$$

Questo implica che la successione  $(x_n)$  tende a  $\pi/2$ .

(c) Tenendo conto del fatto che  $x_n \rightarrow \pi/2$  e che  $\cos \pi/2 = 0$  possiamo migliorare lo sviluppo di  $x_n$  come segue

$$x_n = \arctan \sqrt{2n-1+3\cos x_n} = \arctan \sqrt{2n-1+o(1)}.$$

Ricordando lo sviluppo a  $+\infty$  dell'arcotangente:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{x^{2k+1}}, \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

si ottiene

$$x_n = \frac{\pi}{2} - (2n-1+o(1))^{-1/2} + \frac{1}{3}(2n+O(1))^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \quad (2)$$

Dallo sviluppo  $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ , si trova

$$\begin{aligned} (2n-1+o(1))^{-1/2} &= 2^{-1/2}n^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{2n} + o(1/n)\right)^{-1/2} \\ &= 2^{-1/2}n^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{4n} + o(1/n)\right) = 2^{-1/2}n^{-1/2} + 2^{-5/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}), \end{aligned} \quad (3)$$

Usando semplicemente il fatto che  $(1+x)^{-3/2} = 1 + o(1)$  per  $x \rightarrow 0$ , si trova

$$(2n+O(1))^{-3/2} = 2^{-3/2}n^{-3/2}(1+O(1/n))^{-3/2} = 2^{-3/2}n^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \quad (4)$$

Da (2), (3), (4) concludiamo che

$$x_n = \frac{\pi}{2} - 2^{-1/2}n^{-1/2} + (3^{-1} - 2^{-5/2})n^{-3/2} + o(n^{-3/2}).$$

# Analisi Matematica I - Secondo Compitino

19 Dicembre 2005 - Fila 2

**Esercizio 1.** Data l'applicazione

$$f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1-z}{1+z},$$

determinare  $f(i\mathbb{R})$  e  $f(\mathbb{U} \setminus \{-1\})$ , dove  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  è il cerchio unitario.

SOLUZIONE. Osserviamo che per ogni  $t \in \mathbb{R}$  abbiamo

$$1 + it = \sqrt{1+t^2} e^{i \arctan t}$$

pertanto

$$f(it) = \frac{e^{i \arctan(-t)}}{e^{i \arctan t}} = e^{-2i \arctan t}.$$

Ne segue che  $f(i\mathbb{R}) = e^{i] - \pi, \pi[} = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ .

Ora osserviamo che

$$\mathbb{U} \setminus \{-1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in ] - \pi, \pi[ \}$$

e consideriamo

$$f(e^{i\theta}) = \frac{(1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})}{|1 + e^{i\theta}|^2} = \frac{-2i \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = -\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} i.$$

Ricordando che  $\sin \theta = \theta + o(\theta)$  e  $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + o(\theta^2)$ , per  $\theta \rightarrow 0$ , si hanno i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} -\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = +\infty, \\ \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} -\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = -\infty. \end{aligned}$$

La funzione  $\theta \mapsto -\sin \theta(1 + \cos \theta)^{-1}$  è continua su  $] -\pi, \pi[$ , pertanto l'immagine di tale funzione corrisponde all'insieme  $\mathbb{R}$ , ovvero  $f(\mathbb{U} \setminus \{-1\}) = i\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** (a) Dimostrare che la derivata  $n$ -esima della funzione

$$f(x) = e^{x^4-1}$$

è della forma

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) e^{x^4-1},$$

con  $p_n$  polinomio.

(b) Determinare al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x^4+\lambda \log x} f^{(n)}(x).$$

SOLUZIONE. (a) Dimostriamo per induzione che

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) e^{x^4-1},$$

con  $p_n$  polinomio. Per  $n = 0$  è sufficiente porre  $p_0 = 1$ . Se la formula è vera per  $n$ , si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (p_n'(x) + 4x^3 p_n(x)) e^{x^4-1}.$$

Quindi basta porre

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) + 4x^3 p_n(x), \tag{5}$$

che è un polinomio (la derivata di un polinomio è un polinomio, e l'insieme dei polinomi forma un anello).

(b) Risulta

$$e^{1-x^4+\lambda \log x} f^{(n)}(x) = x^\lambda p_n(x).$$

Dalla formula (5) si deduce che il polinomio  $p_{n+1}$  ha il grado di  $p_n$  più tre. Insieme al fatto che  $p_0 = 1$ , si trova che  $p_n$  ha grado  $3n$ . Sempre da (5), il coefficiente del termine di grado  $3(n+1)$

in  $p_{n+1}$  è pari a 4 volte il coefficiente del termine di grado  $3n$  in  $p_n$ . Insieme al fatto che  $p_0 = 1$ , si trova che il coefficiente del termine di grado  $3n$  in  $p_n$  è  $4^n$ . Concludiamo quindi che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x^4 + \lambda \log x} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < -3n, \\ +\infty & \text{se } \lambda > -3n, \\ 4^n & \text{se } \lambda = -3n. \end{cases}$$

**Esercizio 3.** (a) Dato un intero positivo  $n$ , dimostrare che la funzione

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \tan x - 3nx - 2 \sin x,$$

ha un unico punto di minimo  $x_n$ .

(b) Dimostrare che  $x_n \rightarrow \pi/2$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

(c) Determinare costanti  $a$  e  $b$  tali che valga lo sviluppo

$$x_n = \frac{\pi}{2} + a n^{-1/2} + b n^{-3/2} + o(n^{-3/2}) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

SOLUZIONE. (a) La funzione  $f_n$  è derivabile, e la sua derivata vale

$$f'_n(x) = 1 + \tan^2 x - 3n - 2 \cos x.$$

La funzione  $f'_n$  vale  $-3n - 1$  in  $0$ , ed il suo limite per  $x \rightarrow \pi/2$  (da sinistra) vale  $+\infty$ . Essendo una funzione continua, per il teorema degli zeri la funzione  $f'_n$  possiede almeno uno zero in  $]0, \pi/2[$ . Inoltre  $f'_n$  è strettamente crescente su  $[0, \pi/2]$ , poichè somma di funzioni crescenti di cui almento una (ad esempio  $\tan^2$ ) strettamente crescente. Deduciamo che esiste un unico  $x_n \in ]0, \pi/2[$  tale che  $f'_n$  è negativa su  $[0, x_n[$ , nulla in  $x_n$ , e positiva su  $]x_n, \pi/2[$ . Quindi  $f_n$  è strettamente decrescente su  $[0, x_n]$  e strettamente crescente su  $[x_n, \pi/2[$ . In particolare,  $x_n$  è l'unico punto di minimo di  $f_n$ .

(b) Da  $f'(x_n) = 0$  e dal fatto che il coseno è limitato deduciamo che

$$\tan^2 x_n = 3n - 1 + 2 \cos x_n = 3n + O(1), \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

da cui, tenendo conto del fatto che la tangente è bigettiva da  $[0, \pi/2[$  su  $[0, +\infty[$ , otteniamo

$$x_n = \arctan \sqrt{3n + O(1)}.$$

Questo implica che la successione  $(x_n)$  tende a  $\pi/2$ .

(c) Tenendo conto del fatto che  $x_n \rightarrow \pi/2$  e che  $\cos \pi/2 = 0$  possiamo migliorare lo sviluppo di  $x_n$  come segue

$$x_n = \arctan \sqrt{3n - 1 + 2 \cos x_n} = \arctan \sqrt{3n - 1 + o(1)}.$$

Ricordando lo sviluppo a  $+\infty$  dell'arcotangente:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{x^{2k+1}}, \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

si ottiene

$$x_n = \frac{\pi}{2} - (3n - 1 + o(1))^{-1/2} + \frac{1}{3}(3n + O(1))^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \quad (6)$$

Dallo sviluppo  $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ , si trova

$$\begin{aligned} (3n - 1 + o(1))^{-1/2} &= 3^{-1/2} n^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{3n} + o(1/n)\right)^{-1/2} \\ &= 3^{-1/2} n^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{6n} + o(1/n)\right) = 3^{-1/2} n^{-1/2} + 2^{-1/2} 3^{-3/2} n^{-3/2} + o(n^{-3/2}), \end{aligned} \quad (7)$$

Usando semplicemente il fatto che  $(1+x)^{-3/2} = 1 + o(1)$  per  $x \rightarrow 0$ , si trova

$$(3n + O(1))^{-3/2} = 3^{-3/2} n^{-3/2} (1 + O(1/n))^{-3/2} = 3^{-3/2} n^{-3/2} + o(n^{-3/2}). \quad (8)$$

Da (6), (7), (8) concludiamo che

$$x_n = \frac{\pi}{2} - 3^{-1/2} n^{-1/2} + (3^{-5/2} - 2^{-1/2} 3^{-3/2}) n^{-3/2} + o(n^{-3/2}).$$