Quinto appello del
primo modulo
di ANALISI
–04.09.2006–

1. Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la sommabilità della somma infinita

$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ m\geq 1}} \frac{1}{(n+m)^\alpha}.$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{8x^2+4x+1}.$$

   (a) Determinare a, b, α, β tali che

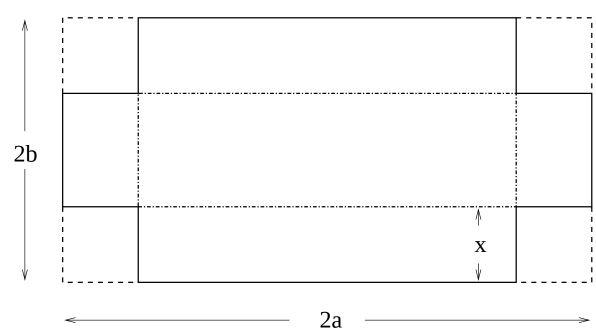
$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + o(x^{-1/3}) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

   (b) Determinare $A = f([0,+\infty[)$ e dimostrare che $f : [0,+\infty[\to A$ è invertibile.

   (c) Determinare d, δ tali che

$$f^{-1}(y) = dy^\delta + o(y^{3/2}) \quad \text{per } y \to +\infty.$$

3. Dai quattro angoli di un foglio rettangolare di lati $2a$ e $2b$ si ritagliano quattro quadrati di lato x e si piegano i quattro rettangoli di bordo in modo da formare una scatola senza coperchio (vedi figura). Determinare x in modo che la scatola abbia capienza massima.



Terzo appello del

secondo modulo

di ANALISI

–04.09.2006–

1. Mostrare che se $\phi \in C^2([0,+\infty[)$ è tale che $\phi'' \geq 0$ per $x \geq 0$ e $\phi(0) \leq 0$ allora la funzione $\phi(x)/x$ è monotona.

2. Mostrare che tutte le soluzioni dell'equazione
$$u'(x) + u(x)\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$
sono infinitesime per $x \to +\infty$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sin(\lambda|x|), \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$
prolungata ad una funzione 2π-periodica.
   (a) Sviluppare f in serie di Fourier.
   (b) Valutando tale sviluppo per $x = 0$ e facendo tendere λ a zero, dimostrare che
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{12}\pi^2.$$