Prima prova intermedia del primo modulo di

ANALISI

–07.11.2005–

1. Sia $\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3} \end{cases}$$

   (a) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

   (b) Calcolare la somma infinita

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k}.$$

   (a) Posto $b_n = a_n^2$ è immediato verificare che $b_{n+1} = b_n + 3$ e quindi, ragionando per induzione, si conclude che b_n è la progressione aritmetica $b_n = 2 + 3n$ e $a_n = \sqrt{b_n}$. Osserviamo che vale la stima $\sqrt{n+1} \leq a_n \leq 2\sqrt{n+1}$. È chiaro quindi che $\lim a_n = +\infty$: se M è una costante fissata $a_n > M$ definitivamente (per esempio per ogni $n \geq M^2$).

   (b) Visto che $a_n \leq 2\sqrt{n+1}$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = +\infty$$

.

2. Dire per quali valori del parametro reale $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{(k^2)}}{k!}$$

È immediato verificare che se $|x| \leq 1$ la serie è *assolutamente convergente*: infatti se $|x| \leq 1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^{(k^2)}}{k!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Se invece $|x| > 1$ allora

$$\frac{|x|^{(k^2)}}{k!} \geq \frac{|x|^{(k^2)}}{k^k} = \left(\frac{|x|^k}{k}\right)^k \tag{1}$$

Scrivendo $|x| = 1 + (|x| - 1)$, dalla formula del binomio segue che

$$\text{se } |x| > 1 \text{ allora} \qquad \frac{|x|^k}{k} \geq \frac{(k-1)}{2}(|x|-1)^2 \to +\infty \text{ per } k \to +\infty.$$

Quindi la quantità tra parentesi tonde che compare nel termine di destra dell'equazione (1) **non** è infinitesima e dunque non sono infinitesimi gli addendi della serie.

Pertanto la serie **non** converge se $|x| > 1$.

3. Sia D l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi con la proprietà che le cifre della loro espressione in base dieci sono strettamente decrescenti (per esempio: 9632 appartiene a D mentre 5411 non appartiene a D).

   (a) Calcolare la cardinalità di D.

   (b) Provare che vale la stima

$$\sum_{k \in D} \frac{1}{k} \leq 10(e-1) - 1$$

   (a) Sia D_ℓ l'insieme dei numeri di D con ℓ cifre. In $|D_1|$ ci sono i numeri da 1 a 9, quindi $|D_1| = 9$.
   In generale, per $\ell \geq 2$, $|D_\ell| = \binom{10}{\ell}$ in quanto D_ℓ può essere messo in bigezione coi sottoinsiemi di ℓ elementi dell'insieme dei simboli $S := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$: se $F \subset S$, $|F| = \ell$ ed $F = \{\alpha_1, ..., \alpha_\ell\}$ è ordinato in modo che le cifre siano decrescenti, ad esso si associa il numero $m = \sum_{j=1}^{\ell} 10^{(\ell-j)}\alpha_j \in D$ e viceversa[1]. Pertanto

$$|D| = 9 + \sum_{\ell=2} 10\binom{10}{\ell} = 9 + (1+1)^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} = 2^{10} - 2 = 1022.$$

   (b)

$$\sum_{k \in D_1} \frac{1}{k} < 9; \qquad \sum_{k \in D_\ell} \frac{1}{k} \leq \binom{10}{\ell} 10^{(1-\ell)}$$

   Quindi

$$|D| \leq 9 + 10 \sum_{\ell=2}^{10} \binom{10}{\ell} 10^{-\ell} = 9 + 10\left[\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} - 2\right] \leq 10e - 11$$

   Osserviamo che nella stima sopra abbiamo maggiorato la somma degli inversi dei primi nove interi positivi con 9. In realtà svolgendo il calcolo si verifica che tale somma è minore di 3: in effetti la stima suggerita e' ben lungi dall'essere ottimale!

[1] Per esempio: al sottoinsieme $\{9,6,3,2,0\} \subset S$ associeremo il numero 96320.