Sesto appello d'esame del secondo modulo di

ANALISI MATEMATICA

–31.01.2005–

1. Dire se le seguenti serie convergano

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}$$

2. Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro reale e $f_a : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_a(x) = ax - \log(1+x) - \frac{1}{2}\log^2(1+x).$$

   (a) Calcolare il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di f_a centrato in zero.

   (b) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ f_a sia invertibile su $(-1, +\infty)$.

3. Si consideri la funzione razionale

$$q(x) = \frac{4}{x^3 - 3x^2 + 4}.$$

   (a) Trovare una primitiva $Q(x)$ di $q(x)$ con $Q(0) = 0$.

   (b) Calcolare i coefficenti c_k dello sviluppo $q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

Secondo appello d'esame del terzo modulo di

ANALISI MATEMATICA

–31.01.2005–

1. Determinare il parallelepipedo di volume massimo fra quanti abbiano cinque facce la cui area assommi ad uno.

2. Siano $f_n: \ [0,\ +\infty[\to \mathbb{R}$ le funzioni definite in successione ponendo

$$f_1(x) = x,$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(\sqrt{n+x}).$$

   (a) Provare che la successione (f_n') converge a zero uniformemente su $[0,\ +\infty[$.

   (b) Provare che la successione $(f_{n+1} - f_n)$ converge a zero uniformemente su ogni intervallo limitato.

   (c) Discutere la convergenza puntuale, uniforme, uniforme sui limitati per la successione (f_n).

Siano A, B e C matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali.

   (a) Scrivere una equazione differenziale lineare ordinaria nella variabile reale t soddisfatta dal cammino di matrici $X(t) = e^{tA}e^{tB}$.

   (b) Risolvere il problema di Cauchy per l'equazione differenziale

$$Y'(t) = AY(t) - Y(t)A,$$

   con la condizione iniziale $Y(0) = C$.