Seconda prova intermedia del terzo modulo di

ANALISI

–20.12.2004–

1. Sia $f : \mathbb{R}^N \to R$ definita da

$$f(\mathrm{x}) := \sum_{i=1}^{N} e^{x_i}.$$

   (a) Mostrare che $\forall r > 0$

$$\min_{|\mathrm{x}|^2 \leq \mathrm{r}^2} f(\mathrm{x}) = Ne^{-r/\sqrt{N}}.$$

   (b) Mostrare che

$$\max_{|\mathrm{x}|^2 \leq \mathrm{r}^2} f(\mathrm{x}) \geq Ne^{r}.$$

   (c) Mostrare che, se $r \leq 1$,

$$\max_{|\mathrm{x}|^2 \leq \mathrm{r}^2} f(\mathrm{x}) = Ne^{r/\sqrt{N}}.$$

2. Sia u soluzione dell'equazione

$$t^2u'' + atu' + bu = 0 \qquad (E).$$

   Posto

$$z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ tu'(t) \end{pmatrix}$$

   si mostri che z è soluzione di un sistema lineare

$$z' = A(t)z \qquad (S)$$

   Si determini la matrice di transizione del sistema (S) nel caso in cui a=-3, b=4.

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x+t) - \sin t \\ x(0) = \alpha \end{cases} \qquad (C)$$

   (a) Mostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema (C) ha un' unica soluzione e che tale soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

   (b) Mostrare che le soluzioni di (C) sono tutte limitate.

   (c) Mostrare che esiste $\lim_{n\to+\infty} x(2n\pi)$.