ANALISI I

–06.09.2004–

1. Sia x_n la successione definita da

$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \end{cases}$$

   (a) Dire se x_n è convergente.

   (b) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log x_n.$$

2. Si calcoli (qualora esista)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \log(n \sin \frac{1}{n}), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

   Detto $Z = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = 0\}$ l'insieme degli zeri di f, mostrare che:

   (a) $Z \neq \emptyset$

   (b) Z ammette massimo e minimo.

ANALISI II[1]

–06.09.2004–

1. Studiare la funzione

$$f(x) = (x-1)^2 - x(\log x)^2, \qquad x > 0.$$

In particolare:

(a) Calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

(b) Provare che f è convessa.

(c) Provare che $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$.

2. Siano $A,\ B \in [0, +\infty]$ definiti da

$$A = \int_{\pi/4}^{+\infty} \left(\frac{\cos x}{x}\right)^2 dx, \qquad b = \int_{\pi/4}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

(a) Mostrare che A e B sono entrambi finiti.

(b) Mostrare che $A < B$.

(c) Mostrare che $A < \frac{2}{\pi} < B$.

3. Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $u'' + \lambda u = 0$, $u'(0) = 0$, $u(1) = 1$.

[1] Per Analisi I+II si svolga l'intero compito di analisi II.