ANALISI I

–31.03.2004–

Rispondere ai quesiti giustificando le risposte.

1. Si consideri l'equazione
$$x = \tan x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$
   (i) Provare che per ogni $k \in \mathbf{Z}$ esiste un'unica soluzione di (1) nell'intervallo $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$.
   (ii) Trovare due costanti a, b tali che, detta x_k la soluzione del punto precedente, valga lo sviluppo $x_k = ak + b + o(1)$ per $k \to +\infty$.
   (iii) Trovare una terza costante c tale che valga lo sviluppo $x_k = ak+b+c/k+o(1/k)$ per $k \to +\infty$.

2. Sia $g_\lambda(x) := e^{-x}(1+x)^{1+\lambda x}$.
   (i) Si determini il parametro reale λ in modo che esista e sia finito il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log g_\lambda(x)}{x^3}$$
   (ii) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'origine è un punto di minimo locale per g_λ.
   (iii) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $g_\lambda(x) > 1$ per ogni $x > 0$.

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$
   (i) La funzione f è uniformemente continua? È lipschitziana?
   (ii) Determinare $C \in \mathbb{R}$ tale che per ogni x, $y \in [0,1]$ si abbia
$$|f(y) - f(x)| \leq C|y-x|^{1/2} \tag{2}$$
   [Suggerimento: si verifichi la disuguaglianza (2) per $0 \leq x < y \leq 1$ distinguendo i due casi $x \geq |y-x|^{1/2}$ e $x \leq |y-x|^{1/2}$.]
   (iii) Determinare $\delta > 0$ in modo che per ogni partizione di Riemann $\mathcal{P}$ dell'intervallo $[0,1]$ tale che $|\mathcal{P}| < \delta$ si abbia
$$S(\mathcal{P}, f) - \int_0^1 f(x)\, dx < 10^{-6}.$$