

Équidistribution en dynamique holomorphe

Fabrizio Bianchi et Lucas Kaufmann

Gazette SMF

Introduction

Dans l'étude des systèmes dynamiques, *l'hyperbolicité uniforme* (c'est-à-dire la contraction et l'expansion uniformes le long des directions stables et instables) joue un rôle central. Alors que les orbites positives dépendent généralement fortement de la condition initiale, dans de nombreux contextes uniformément hyperboliques, les pré-images de points s'équidistribuent par rapport à des mesures naturelles indépendantes du point initial ; les points périodiques s'équidistribuent également par rapport à ces mesures. Ces phénomènes peuvent souvent être compris à l'aide d'outils classiques de dynamique symbolique et de théorie ergodique.

Cependant, dès que l'hyperbolicité uniforme disparaît, la situation devient substantiellement plus délicate. Cela apparaît déjà en dynamique réelle unidimensionnelle, où des applications non uniformément expansives peuvent présenter un comportement irrégulier subtil et les phénomènes d'équidistribution peuvent échouer partiellement ou complètement. Même de légères relaxations de l'hyperbolicité uniforme peuvent engendrer des difficultés techniques sérieuses, et de nombreuses questions fondamentales restent non résolues ; nous en évoquerons un exemple dû à Katok dans la Section 2.3.

La dynamique holomorphe offre un contrepoint frappant. Grâce à la structure holomorphe du plan complexe et, plus généralement, des variétés complexes, il est souvent possible d'établir des résultats forts d'équidistribution pour les pré-images et les points périodiques *sans supposer l'hyperbolicité uniforme*. Depuis les travaux fondateurs de Brolin, Lyubich et Freire–Lopes–Mañé, la théorie du potentiel s'est imposée comme un substitut puissant à l'hyperbolicité uniforme, permettant de contrôler le comportement statistique global dans des contextes loin d'être uniformément hyperboliques.

Un thème récurrent de cette note est que, pour une large classe de systèmes dynamiques f , deux familles naturelles de points définis dynamiquement sont faciles à compter et s'équidistribuent souvent vers une mesure invariante canonique :

- les *pré-images* d'un point x , c'est-à-dire l'ensemble $f^{-n}(x)$ des solutions de $f^n(y) = x$.

Nous noterons

$$\mu_{x,n} := \frac{1}{\#f^{-n}(x)} \sum_{y \in f^{-n}(x)} \delta_y,$$

la mesure de probabilité pondérée sur les points de $f^{-n}(x)$, comptés avec multiplicité.

- les *points périodiques*, c'est-à-dire l'ensemble $\text{Fix}(f^n)$ des solutions de $f^n(y) = y$ ¹. Nous noterons (également en comptant les multiplicités)

$$\nu_n := \frac{1}{\#\text{Fix}(f^n)} \sum_{y \in \text{Fix}(f^n)} \delta_y.$$

Nous verrons que, dans différents contextes, il existe souvent une mesure limite vers laquelle les deux familles de mesures ci-dessus convergent lorsque n tend vers l'infini. Ce type de phénomène est appelé *équidistribution*. Des phénomènes similaires, où une mesure décrit le comportement limite de suites naturelles d'ensembles finis de points, apparaissent également dans de nombreux domaines au-delà des systèmes dynamiques, notamment en théorie des probabilités (zéros de polynômes aléatoires), en analyse et théorie de l'approximation (échantillonnage, points de Fekete), en théorie des nombres et en géométrie arithmétique (points de petite hauteur), etc.

Dans tout ce texte, la convergence des mesures sera entendue au sens faible : une suite de mesures η_n converge faiblement vers une mesure η si

$$\int \varphi d\eta_n \longrightarrow \int \varphi d\eta$$

pour toute fonction continue à support compact φ .

1 Applications uniformément expansives en dimension un : exemples classiques

Nous présentons ici quelques exemples prototypes simples pour lesquels la distribution des pré-images et des points périodiques peut être décrite de manière explicite.

1.1 L'application de doublement sur le cercle

Considérons l'application $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $T(x) = 2x \pmod{1}$. Chaque point x possède exactement deux antécédents : $x/2$ et $(x+1)/2$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, le point x possède exactement 2^n antécédents par T^n , à savoir les points $2^{-n}(x+k)$ avec $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. On a donc

$$\#T^{-n}(x) = 2^n.$$

L'ensemble $\text{Fix}(T^n)$ vérifie $\#\text{Fix}(T^n) = 2^n - 1$ et est donné par

$$\text{Fix}(T^n) = \left\{ \frac{k}{2^n - 1} \pmod{1} : k = 0, 1, \dots, 2^n - 2 \right\}.$$

Théorème 1. *Soit λ la mesure de Haar sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a $\mu_{x,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$, et de plus $\nu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$.*

1. Cela inclut les points périodiques de *période exacte* n ainsi que ceux de période plus courte ; pour éviter certaines subtilités techniques, il est plus commode de travailler avec $\text{Fix}(f^n)$.

Une manière commode de démontrer ce théorème (et plus généralement de tester la convergence faible sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) consiste à utiliser les caractères de Fourier $e_\ell(t) = e^{2\pi i \ell t}$. Un calcul direct montre que, si ℓ n'est pas un multiple de 2^n , on a

$$\int e_\ell(t) d\mu_{x,n}(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{y \in T^{-n}(x)} e^{2\pi i \ell y} = e^{2\pi i \ell x / 2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \ell k / 2^n} = 0,$$

tandis que, si ℓ est un multiple de 2^n , l'intégrale vaut $e^{2\pi i \ell x / 2^n}$. En particulier, pour tout $\ell \neq 0$ fixé, cette intégrale est nulle pour n assez grand. À la limite, cela caractérise la mesure de Haar λ et démontre la convergence faible $\mu_{x,n} \rightarrow \lambda$. Un argument similaire s'applique à ν_n .

Le mécanisme sous-jacent à ces calculs simples, qui se généralise à des situations analogues, est le caractère constant du taux d'expansion $|T'(x)| \equiv 2$. Les mêmes énoncés restent valables pour $T_d(x) = dx \pmod{1}$ pour tout entier $d \geq 2$ (avec 2^n remplacé par d^n).

1.2 Le décalage complet sur deux symboles

Soit $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites binaires muni de la topologie produit, et considérons le décalage à gauche $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$,

$$\sigma((x_0, x_1, x_2, \dots)) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Chaque point possède exactement deux antécédents (on peut choisir librement le premier symbole), d'où $\#\sigma^{-n}(x) = 2^n$. Soit $\mu = (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)^{\otimes \mathbb{N}}$ la mesure de Bernoulli.

Théorème 2. *Pour tout $x \in \Sigma$, on a $\mu_{x,n} \rightarrow \mu$, et également $\nu_n \rightarrow \mu$.*

Cette fois-ci, il suffit de tester la convergence sur les cylindres. Ce sont, par définition, les ensembles de la forme

$$[a_0 \dots a_{m-1}] = \{x \in \Sigma : x_0 = a_0, \dots, x_{m-1} = a_{m-1}\},$$

et ils engendrent la tribu produit sur Σ . Fixons un tel cylindre et supposons $n \geq m$.

Considérons d'abord $\mu_{x,n}$. Parmi les 2^n antécédents d'un point donné x , exactement 2^{n-m} ont les m premiers symboles prescrits, puisque les m premiers symboles sont fixés et que les $n - m$ suivants sont libres. On obtient donc

$$\mu_{x,n}([a_0 \dots a_{m-1}]) = \frac{2^{n-m}}{2^n} = 2^{-m} = \mu([a_0 \dots a_{m-1}]).$$

De même, parmi les 2^n suites fixées par σ^n , exactement 2^{n-m} commencent par le mot $a_0 \dots a_{m-1}$, d'où

$$\nu_n([a_0 \dots a_{m-1}]) = 2^{-m}.$$

Comme les cylindres engendrent la tribu borélienne de Σ , cela démontre $\mu_{x,n} \rightarrow \mu$ et $\nu_n \rightarrow \mu$.

Observons que le développement binaire fournit une semi-conjugaison naturelle $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ envoyant une suite (x_j) sur $\sum_{j \geq 0} x_j / 2^{j+1}$; sous cette application, le décalage correspond à

l'application de doublement ci-dessus. C'est ce qu'on appelle un *codage*, et c'est l'un des liens les plus simples entre la dynamique symbolique et les applications expansives.

Il est souvent commode de remplacer l'espace Σ par son extension bi-infinie $\tilde{\Sigma} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, munie d'une projection naturelle $\pi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$. Le décalage à gauche $\tilde{\sigma} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$, $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ est alors inversible. De plus, l'application π réalise une semi-conjugaison entre $\tilde{\sigma}$ et σ , au sens où $\sigma \circ \pi = \pi \circ \tilde{\sigma}$. L'application $\tilde{\sigma}$ est appelée l'*extension naturelle* de σ .

1.3 Un ensemble de Cantor dynamique

Considérons les deux contractions sur $[0, 1]$ données par

$$f_0(x) = \alpha x \quad \text{et} \quad f_1(x) = \beta x + (1 - \beta),$$

où $0 < \alpha, \beta < 1/2$. On considère l'ensemble limite

$$K = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_{x_0} \circ f_{x_1} \circ \cdots \circ f_{x_{n-1}}(0) : x_j \in \{0, 1\} \right\}.$$

Cet ensemble est défini dynamiquement par les deux contractions f_0 et f_1 ; c'est un ensemble de Cantor. Chaque point de K est codé par une suite $(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, et la mesure de Bernoulli sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ induit une mesure de probabilité naturelle sur K .

Bien que K soit défini à l'aide de contractions, il est également naturellement associé à une application expansive. Définissons $F : K \rightarrow K$ comme l'application donnée par les branches inverses :

$$F(x) = \begin{cases} f_0^{-1}(x) = \alpha^{-1}x & \text{si } x \in [0, \alpha], \\ f_1^{-1}(x) = \beta^{-1}(x - 1 + \beta) & \text{si } x \in [1 - \beta, 1]. \end{cases}$$

Alors F est uniformément expansive sur K , puisque

$$|F'(x)| = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{sur } [0, \alpha], \\ \beta^{-1} & \text{sur } [1 - \beta, 1], \end{cases}$$

et par conséquent $|F'| \geq \min(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) > 1$. L'itinéraire d'un point sous l'action de F enregistre ses symboles $x_n \in \{0, 1\}$, ce qui fournit une conjugaison entre (K, F) et le décalage complet (Σ, σ) sur deux symboles, introduit dans la Section 1.2. En particulier, les résultats de comptage et d'équidistribution des pré-images et des points périodiques sur K découlent directement du Théorème 2.

1.4 Pourquoi ces exemples fonctionnent

Les exemples discutés ci-dessus partagent plusieurs mécanismes communs. Premièrement, la dynamique est *uniformément expansive* : il existe $\lambda > 1$ tel que $|f'(x)| \geq \lambda$ en tout point de l'espace des phases. Il en résulte que les branches inverses des itérés d'ordre élevé sont fortement contractantes et présentent des propriétés de distorsion uniformément bornées. Géométriquement, cela implique que les différentes pré-images de points proches se situent

dans des régions bien séparées et de taille comparable, qui recouvrent l'espace des phases de manière essentiellement uniforme.

Deuxièmement, ces systèmes admettent une description *symbolique* simple. Les points peuvent être codés par des suites de symboles, et la dynamique correspond à un décalage sur ces suites. Le comptage des pré-images ou des points périodiques devient alors un problème combinatoire, et l'équidistribution découle d'arguments élémentaires. Ce point de vue symbolique fournit une explication transparente de la croissance exponentielle des ensembles finis définis dynamiquement.

Enfin, chaque système porte une mesure de probabilité invariante distinguée : la mesure de Haar pour les applications expansives du cercle, et la mesure de Bernoulli pour les décalages et les ensembles de Cantor. Dans tous ces cas, cette mesure coïncide avec *l'unique mesure d'entropie maximale*². L'équidistribution des pré-images et des points périodiques reflète le fait que cette mesure capture le comportement statistique global de la dynamique.

Prises ensemble, ces propriétés montrent que *l'expansion uniforme induit une forme forte de régularité* : le nombre de pré-images et de points périodiques croît exponentiellement ; ces points se répartissent de manière homogène dans l'espace des phases et convergent, de façon bien contrôlée, vers une mesure naturellement associée au système. Ce cadre servira de référence tout au long de ce texte et met en lumière les mécanismes qui seront ensuite partiellement perdus ou remplacés dans des contextes plus généraux.

Remarque. Une propriété supplémentaire des systèmes uniformément expansifs (qui ne sera pas discutée en détail ici) est leur robustesse. L'expansion uniforme est une condition ouverte pour la topologie C^1 : de petites perturbations de la dynamique restent expansives, et nombre des propriétés statistiques décrites ci-dessus persistent dans cette classe. En particulier, la mesure d'entropie maximale — et donc la distribution limite des pré-images et des points périodiques — varie continûment avec l'application.

2 Dynamique uniformément hyperbolique en dimension deux

Les exemples uniformément expansifs discutés dans la section précédente fournissent un cadre modèle pour les phénomènes d'équidistribution, combinant croissance exponentielle de certains ensembles finis définis dynamiquement et forte régularité dynamique.

En dimension deux, l'expansion uniforme n'est souvent plus la notion appropriée. Le cadre naturel devient alors celui de *l'hyperbolicité uniforme*, où l'on observe une expansion dans certaines directions et une contraction dans d'autres. Malgré cette géométrie plus riche, nombre des phénomènes de comptage et d'équidistribution observés en dimension un persistent. Nous commençons par un exemple modèle classique : un automorphisme du tore $\mathbb{T}^2$ (aussi appelé le “cat map” d'Arnold). On trouve dans [KH95] une exposition moderne de cet

2. De façon informelle, l'entropie topologique d'un système dynamique est le taux exponentiel de croissance du nombre de segments d'orbites qui peuvent être distingués à une précision fixée sur un temps long. Dans le même esprit, l'entropie d'une mesure μ ne prend en compte que les segments d'orbites « statistiquement significatifs » par rapport à μ . Pour une mesure d'entropie maximale, ces deux quantités coïncident, ce qui signifie, grosso modo, que μ détecte la complexité maximale du système. Voir [KH95].

exemple, ainsi que d'autres exemples importants comme le fer à cheval de Smale.

2.1 Automorphismes hyperboliques du tore

Les automorphismes hyperboliques du tore bidimensionnel sont parmi les exemples les plus simples de dynamique uniformément hyperbolique en dimension deux. Ils sont remarquablement explicites, puisqu'ils proviennent de l'itération d'applications linéaires.

Rappelons que le tore bidimensionnel est défini comme l'espace quotient $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, où le réseau $\mathbb{Z}^2$ agit sur $\mathbb{R}^2$ par translations. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}),$$

et soit $F_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée. Comme A possède des coefficients entiers, F_A préserve le réseau $\mathbb{Z}^2$ et induit donc un difféomorphisme

$$f = f_A : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2.$$

Puisque $\det A = 1$, l'application réciproque f^{-1} est également induite par une matrice entière.

La matrice A admet deux valeurs propres réelles

$$\lambda^\pm = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

avec $|\lambda^-| < 1 < |\lambda^+|$, et des sous-espaces propres correspondants $L^\pm \subset \mathbb{R}^2$. Les directions $L^\pm$ se projettent sur $\mathbb{T}^2$ en deux champs de droites continus, notés E^s et E^u , invariants par la différentielle Df de f . Le long de ces directions, la dynamique est respectivement uniformément contractante et uniformément expansive. On obtient ainsi une décomposition du fibré tangent

$$T\mathbb{T}^2 = E^s \oplus E^u,$$

invariante par Df . Cela constitue la propriété caractéristique de l'*hyperbolicité uniforme*. Les difféomorphismes possédant cette propriété sur tout l'espace des phases sont appelés *difféomorphismes d'Anosov*.

Comme dans les exemples uniformément expansifs de la Section 1, l'hyperbolicité uniforme implique déjà une forme de complexité dynamique, reflétée par l'abondance des points périodiques.

Proposition 3. *Un point $p \in \mathbb{T}^2$ est périodique pour f si et seulement s'il possède des coordonnées rationnelles. En particulier, les points périodiques sont denses dans $\mathbb{T}^2$.*

La démonstration est élémentaire. Si p est représenté par un vecteur de $(1/q)\mathbb{Z}^2$, alors toutes ses itérées restent dans $((1/q)\mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$, qui est un ensemble fini. Comme f est bijective, l'orbite de p doit être périodique. Réciproquement, si $f^n(p) = p$, et si $v \in \mathbb{R}^2$ est un relevé de p , alors $(A^n - I)v \in \mathbb{Z}^2$. Or $A^n - I$ est inversible, puisque A est hyperbolique. Comme $A^n - I$ est une matrice à coefficients entiers, il s'ensuit que v a des coordonnées rationnelles. Ainsi p est rationnel.

Un résultat plus fort est vrai : les points périodiques sont équidistribués par rapport à la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^2$, qui est l'unique mesure de probabilité invariante par translation.

Théorème 4. *La suite de mesures de probabilité ν_n associée à $\text{Fix}(f^n)$ converge faiblement vers la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^2$.*

Cette équidistribution reflète la forte régularité imposée par l'hyperbolicité uniforme et est parallèle au cas expansif en dimension un. On peut également montrer que, dans cet exemple, il existe une semi-conjugaison entre la dynamique sur le tore et un décalage sur un espace symbolique, ce qui peut être formalisé à l'aide de la notion de partition de Markov, voir par exemple [Bow08].

Bien que l'exemple ci-dessus soit inversible, des phénomènes similaires se produisent pour des applications uniformément hyperboliques non inversibles. Considérons des endomorphismes linéaires de $\mathbb{T}^2$ induits par des matrices entières telles que $|\det A| > 1$ et dont aucune valeur propre n'est de module 1. Si $\delta = |\det A|$, alors le degré topologique de l'application est égal à δ , et chaque point possède exactement δ^n antécédents sous le n -ième itéré. En lien avec l'exemple de la Section 1.1, on peut par exemple considérer la matrice $A = 2 \cdot \text{Id}$, qui correspond à la multiplication par 2 sur le tore.

Outre l'équidistribution des points périodiques, on observe alors l'équidistribution des pré-images : pour tout $x \in \mathbb{T}^2$, la suite de mesures $\mu_{x,n}$ converge faiblement vers la mesure de Haar. Cela reflète étroitement le comportement des applications expansives du cercle et des décalages, et montre que, dans ce cadre uniformément hyperbolique non inversible, les pré-images des points s'équidistribuent également.

2.2 La définition générale d'hyperbolicité uniforme

Dans les exemples précédents, la dynamique est uniformément expansive ou contractante le long d'une direction donnée sur tout l'espace des phases. Cette condition est souvent trop restrictive. Il suffit que ces propriétés soient satisfaites sur un sous-ensemble fermé invariant de l'espace des phases pour développer une théorie riche aux conséquences importantes. La notion se définit formellement comme suit.

Soit M une variété lisse compacte et $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme. Un ensemble f -invariant $\Lambda \subset M$ est dit *hyperbolique* si le fibré tangent au-dessus de Λ admet une décomposition en somme directe invariante par Df

$$TM|_{\Lambda} = E^s \oplus E^u,$$

où Df contracte uniformément E^s et dilate uniformément E^u pour une certaine métrique riemannienne. Lorsque Λ est l'ensemble non errant de f , c'est-à-dire l'ensemble des points dont tout voisinage revient rencontrer lui-même sous un certain itéré positif, et que les points périodiques y sont denses, on dit que f est un difféomorphisme *Axiome A*.

La définition d'hyperbolicité uniforme s'étend naturellement aux systèmes dynamiques non inversibles. Prenons comme exemple l'application³ $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto z^2$. Cette application n'est pas hyperbolique sur $\mathbb{C}$ tout entier. Cependant, sa restriction au cercle $S^1 = \{|z| = 1\}$ est précisément l'application de doublement étudiée à la Section 1. La dérivée de f le long de S^1 a un module constant égal à 2, et par conséquent la restriction

3. Si l'on souhaite la considérer comme une application définie sur un espace des phases compact afin de satisfaire à notre définition, il suffit de l'étendre à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $f(\infty) = \infty$.

de f à S^1 est uniformément expansive (en particulier, $E^s = \{0\}$). Par analogie avec la construction du décalage bi-infini de la Section 1.2, il est aussi possible de définir dans ce cas une extension naturelle inversible de f en considérant l'espace des orbites de f , muni de l'application décalage.

Il se trouve que cette notion d'hyperbolicité uniforme est suffisante pour obtenir l'équidistribution des points périodiques, voir [Bow08].

Théorème 5 (Bowen). *Soit f un difféomorphisme Axiome A tel que sa restriction à l'ensemble non errant soit topologiquement mélangeante, et soit ν_n la mesure associée à $\text{Fix}(f^n)$. Alors les ν_n convergent faiblement vers la mesure d'entropie maximale de f lorsque $n \rightarrow \infty$.*

On rappelle qu'une application est dite topologiquement mélangeante si, pour tous ouverts non vides U, V , on a $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ pour tout n assez grand.

2.3 Au-delà de l'hyperbolicité uniforme

L'hyperbolicité uniforme est une condition structurelle très forte. Elle fournit un cadre remarquablement clair dans lequel les phénomènes de comptage et d'équidistribution peuvent être établis de manière robuste et systématique.

Dès que l'on quitte le cadre uniformément hyperbolique, la situation change radicalement. Dans le contexte plus général de l'*hyperbolicité non uniforme*, l'expansion et la contraction peuvent ne se produire qu'en moyenne au cours du temps (ce qui conduit à la notion d'exposants de Lyapunov) et presque partout relativement à une mesure invariante. Cela mène à des théories techniquement élaborées telles que la théorie de Pesin, voir [BP07]. Même dans des situations très proches du régime uniformément hyperbolique, de nombreuses questions fondamentales deviennent sensiblement plus délicates.

Une illustration en est donnée par un exemple classique dû à Katok [Kat79], obtenu comme une perturbation lisse d'un automorphisme hyperbolique du tore, qui détruit l'hyperbolicité uniforme en un seul point. Malgré sa simplicité apparente, plusieurs propriétés statistiques fondamentales de ce système demeurent mal comprises, et les techniques standard de la dynamique hyperbolique ne s'y appliquent plus.

3 Dynamique holomorphe : au-delà de l'hyperbolicité uniforme

Nous nous tournons maintenant vers les systèmes dynamiques holomorphes. Nous restreindrons notre attention à deux classes fondamentales d'exemples : les endomorphismes holomorphes des espaces projectifs complexes $\mathbb{P}^k$ et les automorphismes de Hénon de $\mathbb{C}^2$.

Un point essentiel est que les principaux résultats d'équidistribution ne requièrent aucune hypothèse *a priori* d'hyperbolicité. A posteriori, ces systèmes se révèlent non uniformément hyperboliques. Surtout, les méthodes issues de l'analyse complexe et de la théorie du pluripotentiel fournissent un cadre analytique puissant, qui permet d'établir des propriétés globales sans recourir aux outils classiques de la dynamique non uniformément hyperbolique.

3.1 Espaces euclidiens et projectifs

Nous commençons par définir les espaces des phases sur lesquels la dynamique aura lieu. Par simplicité, nous nous limitons aux espaces de dimension complexe un et deux, bien qu’une grande partie de la théorie s’étende aux dimensions supérieures.

Les espaces des phases les plus simples sont les espaces euclidiens $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^2$, munis de leurs structures complexes standards. Dans de nombreuses situations, il est toutefois commode de travailler avec des espaces des phases compacts, ce qui nous conduit à considérer des compactifications de ces espaces.

Dans le cas de $\mathbb{C}$, d’après le théorème d’uniformisation de Riemann, il existe une unique compactification en tant que variété complexe, à savoir la compactification à un point $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Cet espace est une surface de Riemann compacte et peut être identifié soit à la sphère de Riemann, soit à $\mathbb{P}^1$, l’espace projectif complexe de dimension un, défini comme l’ensemble des droites complexes passant par l’origine dans $\mathbb{C}^2$. Dans cette dernière description, la droite passant par (z_0, z_1) est notée $[z_0 : z_1]$. On parle alors de *coordonnées homogènes*, et le quotient z_0/z_1 est appelé *coordonnée affine*.

L’espace $\mathbb{C}^2$ admet de nombreuses compactifications holomorphes non équivalentes. La plus naturelle⁴ est le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$, obtenu à partir de $\mathbb{C}^2$ en ajoutant un point “à l’infini” pour chaque direction. De manière équivalente, $\mathbb{P}^2$ est l’ensemble des droites complexes passant par l’origine dans $\mathbb{C}^3$. Comme précédemment, la droite passant par (z_0, z_1, z_2) est notée à l’aide de ses coordonnées homogènes $[z_0 : z_1 : z_2]$.

Plus généralement, l’espace projectif $\mathbb{P}^k$ est l’ensemble des droites complexes passant par l’origine dans $\mathbb{C}^{k+1}$, muni de coordonnées homogènes $[z_0 : z_1 : \dots : z_k]$. Par récurrence, on montre que $\mathbb{P}^k$ s’obtient comme une compactification de $\mathbb{C}^k$ en lui ajoutant un hyperplan à l’infini, isomorphe à $\mathbb{P}^{k-1}$. Plus précisément, on a $\mathbb{P}^k = \mathbb{C}^k \cup \mathbb{P}^{k-1}$.

3.2 Endomorphismes des espaces projectifs

Désormais, nous fixons $k = 1$ ou 2 . Un fait fondamental est que toute application holomorphe non constante $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ est algébrique. Plus précisément, il existe des polynômes homogènes $P_0, \dots, P_k$ de même degré d et sans zéros communs dans $\mathbb{P}^k$ tels que

$$f([z]) = [P_0(z) : \dots : P_k(z)].$$

L’entier d est appelé le *degré algébrique* de f . Lorsque $d = 1$, l’application est linéaire et sa dynamique est entièrement décrite par sa forme normale de Jordan. Dans la suite, nous supposons toujours que $d \geq 2$ et nous appellerons f un *endomorphisme*.

3.2.1 Pré-images des points et mesure d’équilibre : le cas $k = 1$

Lorsque $k = 1$, un endomorphisme de $\mathbb{P}^1$ est donné, en coordonnées affines, par une fraction rationnelle, c’est-à-dire le quotient de deux polynômes en une variable complexe.

4. Il convient de noter que la sphère réelle de dimension quatre n’admet pas de structure complexe. Il existe plusieurs manières de justifier le fait que le plan projectif est la compactification canonique dans la catégorie complexe.

Nous nous trouvons ainsi dans le cadre classique de la dynamique complexe initié notamment par Pierre Fatou et Gaston Julia dans les années 1910.

La dynamique d'un polynôme n'est en général pas (uniformément) hyperbolique⁵. Une avancée décisive provient de l'utilisation de la théorie du potentiel (fonctions sous-harmoniques, opérateur de Laplace, fonctions de Green, etc.), qui permet d'obtenir des résultats remarquables sans imposer d'hypothèses supplémentaires sur f . Ces idées ont été introduites et développées par plusieurs auteurs, comme Broiln, Lyubich, Freire-Lopes-Mañé, etc. Nous présentons maintenant les notions de base principales. Par simplicité, nous commençons par le cas polynomial.

Ensembles de Fatou et de Julia. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme complexe. L'*ensemble de Julia rempli* de f est défini par

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid \{f^n(z)\}_{n \geq 0} \text{ est bornée}\}. \quad (1)$$

Puisque f est un polynôme de degré au moins deux, il existe $R > 0$ tel que $|f(z)| > |z|$ dès que $|z| > R$. Tout point dont l'orbite est bornée appartient donc au disque fermé de rayon R , et K est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$. L'*ensemble de Julia* J de f est le bord topologique de K , et l'*ensemble de Fatou* F est son complémentaire dans $\mathbb{C}$. De manière équivalente, F est le domaine de normalité des itérés de $f : p \in F$ si et seulement s'il existe un voisinage U de p tel que la famille d'itérés $\{f^n|_U\}_{n \geq 0}$ soit normale, c'est-à-dire relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. De façon informelle, l'ensemble de Fatou est la région où la dynamique de f est stable par rapport aux conditions initiales, tandis que l'ensemble de Julia constitue le lieu du comportement chaotique.

Fonction de Green et mesure d'équilibre. Une idée classique en théorie du potentiel consiste à associer à tout compact⁶ $K \subset \mathbb{C}$ une *fonction de Green* et une *mesure d'équilibre*. La mesure d'équilibre est l'unique mesure de probabilité μ supportée par K qui minimise l'énergie logarithmique

$$I(\nu) = - \iint \log |z - w| \, d\nu(z) \, d\nu(w)$$

parmi toutes les mesures de probabilité ν supportées sur K .

La mesure μ admet un potentiel distingué sur $\mathbb{C}$, appelé *potentiel logarithmique*. Plus précisément, on a

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta G, \quad \text{où} \quad G(z) := \int \log |z - w| \, d\mu(w).$$

Ici, le Laplacien est compris au sens faible (distributionnel). La fonction G est appelée la fonction de Green de K .

Appliquée à l'ensemble de Julia rempli K d'un polynôme f de degré $d \geq 2$, cette construction fournit une mesure de probabilité naturelle μ supportée sur K (en fait, la mesure d'équilibre est supportée sur la frontière $J = \partial K$), ainsi qu'un potentiel canonique G . Dans ce cadre

5. Un polynôme est dit *uniformément hyperbolique* si son action sur l'ensemble de Julia J (cf. la définition ci-dessus) est uniformément expansive. Voir Section 2.2. Plus précisément, cela signifie qu'il existe des constantes $c > 0$ et $\lambda > 1$ telles que $|(f^n)'(x)| \geq c\lambda^n$ pour tout $x \in J$ et tout $n \geq 1$.

6. Strictement parlant, il faut supposer que K est non polaire, ce qui est le cas des ensembles de Julia remplis.

dynamique, la fonction de Green admet une interprétation naturelle. On peut montrer que

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n(z)|, \quad \text{où} \quad \log^+ t = \max(\log t, 0). \quad (2)$$

Autrement dit, la fonction de Green dynamique G est une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ qui mesure la vitesse à laquelle un point z s'échappe vers l'infini sous l'itération de f . On peut montrer que $G = 0$ exactement sur l'ensemble de Julia rempli K .

Résultats d'équidistribution. Nous pouvons maintenant formuler le théorème de Brolin [Bro65], puis en esquisser l'idée de la preuve. Rappelons notre notation $\mu_{x,n} = d^{-n} \sum_{y \in f^{-n}(x)} \delta_y$.

Théorème 6 (Brolin). *Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré $d \geq 2$, et soit μ sa mesure d'équilibre. Alors*

$$\mu_{x,n} \longrightarrow \mu$$

au sens faible, pour tout $x \in \mathbb{C}$ sauf si x est un point totalement invariant, c'est-à-dire si $f^{-1}(x) = \{x\}$.

Il est connu que $(1/2\pi) \log |z|$ est la solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que $\Delta \log |z| = 2\pi \delta_0$ au sens des distributions. Il en découle que

$$\mu_{x,n} = \frac{1}{2\pi} \Delta u_{x,n} \quad \text{où} \quad u_{x,n}(z) := \frac{1}{d^n} \log |f^n(z) - x|.$$

La convergence des mesures $\mu_{x,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$ résulte alors de la convergence des potentiels $u_{x,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G$. La convergence est ici au sens L^1_{loc} , ce qui implique la convergence faible des mesures associées. Brolin établit ce résultat après une analyse fine de la convergence des potentiels $u_{x,n}$, qui dépend du comportement des orbites positives de f . La conclusion est que $u_{x,n}(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(z)$ sauf si x est un point totalement invariant, ce qui ne peut se produire que si f est conjugué à z^d et si x correspond au point 0 par cette conjugaison.

Une vingtaine d'années plus tard, les résultats de Brolin ont été étendus au cas des fractions rationnelles par Lyubich [Lyu83] ainsi que par Freire–Lopes–Mañé [FLM83]. Tous ces résultats ont depuis été généralisés aux dimensions supérieures à l'aide de la *théorie du pluripotentiel*. On renvoie également au Théorème 8 ci-dessous.

Dans ce cadre plus général, le point ∞ ne joue plus de rôle particulier, et l'on ne dispose en général ni d'un ensemble de Julia rempli ni d'une mesure d'équilibre associée au sens classique. Les ensembles de Fatou et de Julia restent toutefois bien définis. On montre en général que la suite $d^{-n}(f^n)^*\nu$, où $(f^n)^*\nu$ désigne la mesure obtenue en tirant ν en arrière par f^n (voir Section 3.2.2 pour plus de détails sur cette définition), converge vers une mesure canonique pour tout choix raisonnable d'une mesure initiale ν sur $\mathbb{P}^1$ (par exemple la mesure uniforme sur la sphère). Cette propriété se généralise aux dimensions supérieures, comme nous allons maintenant l'expliquer.

3.2.2 Pré-images de points et mesure d'équilibre : le cas général $k \geq 1$

Comme dans le cas des polynômes sur $\mathbb{C}$ discuté ci-dessus, tout endomorphisme $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ admet une mesure invariante canonique. Nous présentons maintenant une construction

alternative de la mesure μ , duale de celle définie via la fonction de Green et valable pour des endomorphismes arbitraires, pas nécessairement polynomiaux.

En général, une mesure sur l'espace des phases peut toujours être “poussée en avant” par une application. Une propriété particulière des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ est que les mesures de probabilité peuvent également être “tirées en arrière”. Autrement dit, étant donnée une mesure positive ν sur $\mathbb{P}^k$, on peut définir une mesure $f^*\nu$. Cela vient essentiellement du fait que tout point $a \in \mathbb{P}^k$ possède toujours d^k pré-images comptés avec multiplicité⁷. Par exemple,

$$f^*\delta_a = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \delta_x = d^k \mu_{a,1}.$$

La masse de $f^*\nu$ est d^k fois celle de ν .

Rappelons qu'une mesure ν agit sur une fonction test φ (c.-à-d. une fonction lisse à support compact) par intégration, que l'on note $\langle \nu, \varphi \rangle$. Par dualité, on obtient :

$$\left\langle \frac{1}{d^k} f^* \nu, \varphi \right\rangle = \langle \nu, \Lambda \varphi \rangle,$$

où $\Lambda := \frac{1}{d^k} f_*$ est l'opérateur

$$\Lambda \varphi(a) = \frac{1}{d^k} \sum_{x \in f^{-1}(a)} \varphi(x)$$

agissant sur les fonctions définies sur $\mathbb{P}^k$. Il s'agit de l'opérateur de transfert (ou opérateur de Ruelle–Perron–Frobenius). Il découle immédiatement de la définition que $\Lambda \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Le résultat remarquable suivant fournit un moyen d'obtenir la mesure d'équilibre par itération de Λ , voir [DS10]. Rappelons que le spectre essentiel d'un opérateur est le sous-ensemble du spectre obtenu en retirant les points isolés correspondant à des valeurs propres de multiplicité finie. Le rayon spectral essentiel est le rayon du plus petit disque centré à l'origine contenant le spectre essentiel.

Théorème 7 (Dinh–Sibony). *Il existe un espace fonctionnel E sur $\mathbb{P}^k$ contenant les fonctions lisses pour lequel $\Lambda : E \rightarrow E$ est borné et possède un trou spectral. Plus précisément, le rayon spectral essentiel de Λ est strictement inférieur à 1 et Λ admet une unique valeur propre de module ≥ 1 , située en 1, isolée et de multiplicité un.*

En pratique, ce théorème montre que, pour toute fonction φ sur $\mathbb{P}^k$ appartenant à une classe appropriée, les itérés $\Lambda^n \varphi$ convergent exponentiellement vite vers une constante c_φ , qui dépend de f à travers l'opérateur Λ . Il existe alors une unique mesure μ sur $\mathbb{P}^k$ telle que $\int \varphi d\mu = c_\varphi$ pour toute fonction lisse φ . Cette mesure est la *mesure d'équilibre de f* . Cette approche renforce le point de vue du théorème de Brolin : elle donne non seulement la convergence vers μ , mais aussi une vitesse exponentielle de convergence pour les fonctions test appartenant à l'espace E .

L'obtention d'un trou spectral pour l'opérateur de transfert associé à un système dynamique est généralement un problème délicat. En dynamique réelle, cela requiert typiquement de fortes hypothèses d'hyperbolicité (voir par exemple [Gou15]). En revanche, dans le cadre

7. Noter que cela n'est pas vrai pour les applications réelles, puisque $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos.

holomorphe, la théorie du pluripotentiel et la structure complexe sous-jacente fournissent des espaces naturels E sur lesquels l'action de l'opérateur Λ peut être contrôlée efficacement, sans hypothèse supplémentaire sur f . Des choix adaptés pour l'espace E incluent les espaces de fonctions d.s.h. (localement des différences de fonctions plurisousharmoniques, une classe naturelle en théorie du pluripotentiel), ainsi que les espaces de Sobolev complexes introduits par Dinh–Sibony (voir [DS10]).

Il convient de noter que ces espaces de fonctions test contiennent des fonctions singulières et que les normes associées sont définies au sens faible (distributionnel), ne fournissant donc aucun contrôle uniforme ou ponctuel direct. En particulier, des arguments de la théorie du pluripotentiel supplémentaires sont nécessaires pour obtenir les estimations ponctuelles sur la suite $\Lambda^n \varphi$, lesquelles servent ensuite à démontrer la convergence des mesures $\mu_{x,n}$. Finalement, cette approche fournit une solution complète au problème d'équidistribution des pré-images. Nous renvoyons à [DS10] pour plus de détails.

Théorème 8 (Brolin, Freire–Lopes–Mañé, Lyubich, Briend–Duval, Dinh–Sibony). *Il existe un sous-ensemble algébrique $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^k$ tel que $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$ et*

$$\mu_{x,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \quad \text{si et seulement si} \quad x \notin \mathcal{E},$$

où μ désigne la mesure d'équilibre de f .

L'ensemble $\mathcal{E}$ généralise les points totalement invariants déjà rencontrés dans le théorème de Brolin. Il est vide pour un endomorphisme générique f . Lorsque $k = 1$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est fini et contient au plus deux points. Lorsque $k = 2$, la composante unidimensionnelle de $\mathcal{E}$ est constituée de 0, 1, 2 ou 3 droites, et $\mathcal{E}$ peut également contenir des composantes de dimension zéro, c'est-à-dire un nombre fini de points isolés, voir [FS94, CLN00]. Pour $k \geq 3$, la structure de $\mathcal{E}$ est plus complexe et reste à ce jour seulement partiellement comprise.

Observons que le Théorème 8 montre que la dynamique de f “dans le passé” est extrêmement régulière. En fait, il existe essentiellement un unique comportement limite : les orbites négatives convergent vers l'ensemble de Julia, ou plus précisément vers la mesure d'équilibre. Cela contraste fortement avec la dynamique “dans le futur”. Le comportement de $f^n(z)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ dépend fortement de la condition initiale et peut présenter une grande variété de phénomènes : orbites périodiques (attractives, neutres ou répulsives), comportement chaotique, convergence vers des cycles attractifs ou rotation quasi périodique.

3.2.3 Pré-images de sous-variétés et courants d'équilibre

Une nouveauté en dimension deux (ou plus) est qu'on peut considérer l'équidistribution non seulement des points, mais aussi de suites de courbes dynamiquement définies (ou plus généralement de sous-variétés). Cette perspective fournit également une autre manière de définir la mesure d'équilibre en dimension deux, comme nous l'expliquons maintenant.

Une façon naturelle de comprendre la limite d'une suite de points (ou d'ensembles finis) consiste à voir ces points comme des sommes de mesures de Dirac, comme illustré dans différents exemples ci-dessus. Pour étudier la limite d'une suite de courbes, la notion de *courant* joue le rôle de la mesure.

Comme vu ci-dessus, une mesure positive μ agit sur l'espace des fonctions lisses à support compact par intégration. Par analogie, un courant⁸ T sur $\mathbb{P}^2$ est une fonctionnelle linéaire agissant sur l'espace $\Omega_{\mathbb{P}^2}^2$ des formes différentielles de degré 2. Par exemple, si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe algébrique lisse, elle définit un courant $[C]$ par intégration :

$$\Omega_{\mathbb{P}^2}^2 \ni \alpha \longmapsto \langle [C], \alpha \rangle := \int_C \alpha.$$

Cette notion permet de définir la convergence de suites de cycles algébriques, c'est-à-dire des combinaisons linéaires formelles de sous-variétés : une suite $T_n = \sum_j c_j^n [V_j^n]$ converge vers un courant T lorsque $n \rightarrow \infty$ si, pour toute forme test $\alpha \in \Omega_{\mathbb{P}^2}^2$, $\langle T_n, \alpha \rangle \rightarrow \langle T, \alpha \rangle$.

Le théorème suivant montre que les pré-images itérées de droites convergent vers un courant canonique. Ce résultat a d'abord été démontré par Hubbard–Papadopol [HP94] dans le cas des formes lisses. Le cas des droites a ensuite été traité pour des applications Zariski génériques par Fornæss–Sibony [FS95], puis pour des endomorphismes quelconques et des droites génériques par Russakovskii–Shiffman [RS97]. Le résultat complet en dimension 2 a été établi par Favre–Jonsson [FJ03]. Il constitue un analogue direct du Théorème 8, dans lequel les points sont remplacés par des droites. La généralisation au cas de la dimension $k \geq 3$ a ensuite été obtenue par Dinh et Sibony, voir [DS10].

Théorème 9 (Hubbard–Papadopol, Fornæss–Sibony, Russakovskii–Shiffman, Favre–Jonsson). *Soit $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Il existe un courant d'équilibre T possédant les propriétés suivantes :*

1. *Pour toute 2-forme lisse α sur $\mathbb{P}^2$,*

$$\frac{1}{d^n} (f^n)^* \alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c_\alpha T$$

pour un certain $c_\alpha \in \mathbb{R}$.

2. *Soit L une droite générique de $\mathbb{P}^2$. Alors*

$$\frac{1}{d^n} [f^{-n}(L)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T.$$

Le courant T peut également être utilisé pour donner une définition alternative de la mesure d'équilibre. En effet, l'auto-intersection $T \wedge T$ est bien définie et on a $\mu = T \wedge T$. Pour définir ce produit, on commence par montrer que T est la limite faible d'une famille de 2-formes lisses $(T_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On pose alors $T \wedge T := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon \wedge T_\varepsilon$. On peut démontrer que T possède une régularité suffisante pour que cette limite existe et fournisse une définition cohérente du produit d'intersection (théorie de Bedford–Taylor). En revanche, l'auto-intersection d'un courant arbitraire n'est généralement pas bien définie. Ce phénomène est comparable à la difficulté, voire à l'impossibilité, de définir le produit de deux distributions, ou encore à celle que l'on rencontre pour définir l'intersection de sous-variétés algébriques en présence d'un excès de dimension.

8. Ce que nous définissons ici est un courant de degré 2, ou plus précisément de bidegré $(1, 1)$. En dimension supérieure, il existe des courants de bidegré (p, p) pour tout p compris entre zéro et la dimension de l'espace ambiant.

3.2.4 Points périodiques

Le deuxième problème d'équidistribution évoqué dans l'introduction admet également une réponse positive dans notre cadre. Il a été démontré par Lyubich [Lyu83] en dimension un et par Briend–Duval [BD99] en dimension supérieure. L'idée principale est d'utiliser l'équidistribution des pré-images pour construire des branches inverses centrées sur des points de l'ensemble de Julia, envoyant un disque de manière compacte dans lui-même sous f^{-n} , puis d'appliquer un théorème du point fixe pour obtenir un point périodique. Une difficulté majeure provient de l'ensemble critique de f et de son orbite, qui constituent une obstruction à l'existence de branches inverses.

Théorème 10 (Lyubich, Briend–Duval). *Soit $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$. Soit μ sa mesure d'équilibre et $\nu_n = \frac{1}{\#\text{Fix}(f^n)} \sum_{y \in \text{Fix}(f^n)} \delta_y$. Alors $\nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$ au sens faible.*

Les Théorèmes 8 et 10 sont énoncés pour les systèmes dynamiques holomorphes et démontrés à l'aide de l'analyse complexe et de la théorie du pluripotentiel. Il est particulièrement remarquable que ces résultats aient des analogues dans le cadre arithmétique, c'est-à-dire pour des systèmes dynamiques algébriques définis sur des corps de nombres. Historiquement, ces résultats proviennent de l'étude des points de torsion et des points de petite hauteur sur les courbes elliptiques et les variétés abéliennes, et ont été étendus par la suite à des systèmes dynamiques algébriques plus généraux. Dans ce contexte, sous certaines conditions, les suites de points dont la hauteur tend vers zéro deviennent équidistribuées par rapport à des mesures canoniques naturelles, définies sur des espaces analogues à l'espace projectif complexe mais intégrant des structures arithmétiques (espaces de Berkovich, etc.). On renvoie à [CL06] et ses références pour plus de détails.

3.2.5 Hyperbolicité non uniforme

Il est particulièrement remarquable que les résultats ci-dessus sont valables pour *tous* les endomorphismes, sans aucune hypothèse *a priori* d'hyperbolicité. Un théorème profond de Briend–Duval [BD99] affirme que les exposants de Lyapunov de f (les k nombres réels mesurant la séparation asymptotique des orbites typiques selon différentes directions) sont tous minorés par $\frac{1}{2} \log d$. En particulier, tous les exposants sont positifs, ce qui implique *a posteriori* que le système est non uniformément hyperbolique. Cependant, les démonstrations des théorèmes ci-dessus ne reposent pas directement sur la théorie de Pesin pour les systèmes non uniformément hyperboliques ; elles utilisent essentiellement la théorie du pluripotentiel et l'analyse complexe en dimension supérieure. Ainsi, l'hyperbolicité non uniforme apparaît comme une conséquence de la théorie, et non comme une hypothèse.

3.3 Systèmes holomorphes inversibles : les applications de Hénon

Nous abordons maintenant la deuxième classe fondamentale de systèmes dynamiques holomorphes en dimension complexe deux, à savoir les *automorphismes de Hénon*. Ces applications constituent l'analogue naturel, dans la catégorie holomorphe, des difféomorphismes uniformément hyperboliques de type selle en dynamique réelle, comme les automorphismes

hyperboliques du tore discutés dans la Section 2.1. Contrairement aux endomorphismes de $\mathbb{P}^2$ discutés précédemment, les applications de Hénon sont *inversibles*, et elles présentent à la fois des directions expansives et contractives. Elles occupent une place centrale en dynamique réelle et complexe, et de nombreuses questions importantes restent ouvertes ; voir [dH24] pour un aperçu.

Une *application de Hénon* est un automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$f(x, y) = (p(x) - ay, x),$$

où p est un polynôme de degré $d \geq 2$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Un résultat fondamental de Friedland et Milnor affirme que, à conjugaison polynomiale près, tout automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$ ayant une entropie topologique positive est une *application de Hénon généralisée*, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire comme une composition finie d'applications f comme ci-dessus. Chaque application de Hénon (généralisée) s'étend naturellement en une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2$, holomorphe en dehors d'un ensemble fini d'indétermination à l'infini. On observe que lorsque $a = 0$, on obtient $f(x, y) = (p(x), x)$, de sorte que les applications de Hénon peuvent être considérées comme des perturbations inversibles en dimension deux de polynômes en dimension un.

Étant donné que f est inversible, il est naturel de distinguer les itérations futures et passées. Par analogie avec les ensembles de Julia remplis des polynômes à une variable définis précédemment (voir (1)), on définit

$$K^+ = \{z \in \mathbb{C}^2 : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée}\} \quad \text{et} \quad K^- = \{z \in \mathbb{C}^2 : (f^{-n}(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée}\}.$$

Leurs bords topologiques $J^+ = \partial K^+$ et $J^- = \partial K^-$ jouent un rôle analogue à l'ensemble de Julia en dynamique unidimensionnelle. L'intersection

$$J = J^+ \cap J^-$$

est le lieu chaotique naturel du système.

Comme dans le cas réel uniformément hyperbolique, la coexistence de l'expansion et de la contraction entraîne une dynamique de type selle. Cependant, contrairement à la situation d'Anosov, aucune hypothèse d'*hyperbolicité a priori* n'est faite : les ensembles $J^\pm$ et J peuvent avoir une géométrie très compliquée, et l'hyperbolicité uniforme sur J n'est pas vérifiée en général.

Fonctions de Green et courants invariants. Les outils issus de la théorie du potentiel peuvent à nouveau être utilisés pour comprendre la dynamique globale du système. Par analogie avec (2), on définit les fonctions de Green

$$G^+(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ \|f^n(z)\|, \quad G^-(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ \|f^{-n}(z)\|,$$

qui mesurent la vitesse d'échappement des orbites sous itération dans le futur et dans le passé. Ces fonctions sont plurisousharmoniques, s'annulent précisément sur K^+ et K^- respectivement, et satisfont les relations fonctionnelles

$$G^+ \circ f = d \cdot G^+, \quad G^- \circ f^{-1} = d \cdot G^-.$$

En appliquant l'opérateur dd^c à ces fonctions, on obtient deux courants positifs fermés de type $(1, 1)$,

$$T^+ = \mathrm{dd}^c G^+, \quad T^- = \mathrm{dd}^c G^-.$$

Ici dd^c est l'opérateur $\frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial}$ au sens des courants, défini par dualité : si α est une forme test de degré 2 alors

$$\langle \mathrm{dd}^c G^\pm, \alpha \rangle := \langle G^\pm, \mathrm{dd}^c \alpha \rangle = \int G^\pm \cdot \mathrm{dd}^c \alpha.$$

Ces courants sont invariants respectivement par f et f^{-1} : $f^* T^+ = d \cdot T^+$ et $(f^{-1})^* T^- = d \cdot T^-$. Ils jouent le rôle des objets invariants instables et stables, et fournissent un analogue holomorphe des champs de droites invariants rencontrés pour les automorphismes hyperboliques du tore dans la Section 2.1.

Équidistribution des courbes et courants invariants. Puisque f est un automorphisme, chaque point possède exactement un antécédent, il n'existe donc pas d'énoncé d'équidistribution pertinent pour les pré-images de points. On considère plutôt les pré-images de courbes algébriques.

Soit $C \subset \mathbb{C}^2$ une courbe algébrique générique, par exemple une droite affine générique. Bedford–Smillie [BS91] ont montré que les images réciproques normalisées du courant d'intégration $[C]$ sous itération de f convergent vers le courant stable T^+ :

$$\frac{1}{d^n} (f^n)^* [C] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c T^+,$$

où c est le degré de C . De même, pour une courbe générique C , les images réciproques normalisées sous itération inverse convergent vers le courant instable T^- :

$$\frac{1}{d^n} (f^{-n})^* [C] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c T^-.$$

Ces résultats de convergence montrent que les courants T^+ et T^- décrivent la distribution globale des images directes et inverses de courbes algébriques génériques, de la même manière que les feuilletages invariants gouvernent la géométrie des systèmes réels uniformément hyperboliques. En termes heuristiques, T^+ est composé de disques holomorphes tangents aux directions stables, tandis que T^- est composé de disques holomorphes tangents aux directions instables ; toutefois, cette description n'a de sens que de manière faible, presque partout. Cela mène à la théorie des courants laminaires, qui trouve de nombreuses applications en dynamique ; voir par exemple [Duj06] en dimension deux et [dT08] en dimension supérieure. Encore une fois, aucune hypothèse d'hyperbolicité uniforme n'est nécessaire : la convergence découle de la théorie du pluripotentiel et des relations fonctionnelles satisfaites par les fonctions de Green.

La mesure d'équilibre et l'équidistribution des points périodiques. L'intersection des deux courants invariants ci-dessus définit une mesure de probabilité invariante canonique

$$\mu = T^+ \wedge T^-,$$

appelée la *mesure d'équilibre* de l'application de Hénon. Cette mesure est supportée sur l'ensemble J^9 et est invariante par f et f^{-1} . Ici, le produit d'intersection peut être défini soit

9. On ne sait pas en général si le support de μ coïncide exactement avec J .

par régularisation (comme indiqué après l'énoncé du Théorème 9), soit de façon géométrique, en étudiant l'intersection des disques holomorphes stables et instables, ce qui relève d'un travail technique important.

La mesure μ joue le même rôle que la mesure de Haar pour les automorphismes d'Anosov du tore, ou que la mesure d'équilibre des polynômes sur $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^k$. En particulier, les points périodiques de période n s'équidistribuent par rapport à μ lorsque $n \rightarrow \infty$, voir [BLS93, Duj06, DS16].

Ces résultats ont été obtenus en s'appuyant sur la théorie du pluripotentiel et la géométrie des courants invariants, auxquelles s'ajoutent quelques outils classiques de la théorie de Pesin. Comme dans le cas non inversible, les démonstrations ne reposent pas sur une hypothèse d'hyperbolicité uniforme, mais sur la structure holomorphe du système. Ici, la laminarité des courants $T^\pm$, mentionnée ci-dessus, joue un rôle crucial. Il s'agit de comprendre avec précision comment les disques holomorphes dirigés par les variétés stables et instables composent ces courants, puis dans quelle mesure l'intersection $T^+ \wedge T^-$ coïncide avec l'intersection géométrique de ces disques. Ceci mène à une riche théorie de l'intersection des courants, qui possède des applications bien au-delà de la dynamique holomorphe. Nous ne développerons pas cet aspect ici, qui mériterait à lui seul un article à part entière.

Références

- [BD99] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Lyapunov exponent and the distribution of the periodic points of an endomorphism of $\mathbb{CP}^k$. *Acta Math.*, 182(2) :143–157, 1999.
- [BLS93] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. *Invent. Math.*, 114(2) :277–288, 1993.
- [Bow08] Rufus Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, revised edition, 2008. With a preface by David Ruelle.
- [BP07] Luis Barreira and Yakov Pesin. *Nonuniform hyperbolicity. Dynamics of systems with nonzero Lyapunov exponents*, volume 115 of *Encycl. Math. Appl.* Cambridge : Cambridge University Press, 2007.
- [Bro65] Hans Brolin. Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.*, 6 :103–144 (1965), 1965.
- [BS91] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$: Currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. Math.*, 103(1) :69–99, 1991.
- [CL06] Antoine Chambert-Loir. Measures and equidistribution in Berkovich spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 595 :215–235, 2006.
- [CLN00] D. Cerveau and A. Lins Neto. Hypersurfaces exceptionnelles des endomorphismes de $\mathbb{CP}(n)$. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 31(2) :155–161, 2000.
- [dH24] Julia Xénelkis de Hénon. Hénon maps : a list of open problems. *Arnold Math. J.*, 10(4) :585–620, 2024.
- [DS10] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamics in several complex variables : endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. In *Holomorphic*

- dynamical systems. Lectures given at the C.I.M.E. summer school, Cetraro, Italy, July 7–12, 2008*, pages 165–294. Berlin : Springer, 2010.
- [DS16] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Equidistribution of saddle periodic points for Hénon-type automorphisms of $\mathbb{C}^k$. *Math. Ann.*, 366(3-4) :1207–1251, 2016.
 - [dT08] Henry de Thélin. A criterion of local laminarity in arbitrary dimension. *Am. J. Math.*, 130(1) :187–205, 2008.
 - [Duj06] Romain Dujardin. Laminar currents and birational dynamics. *Duke Math. J.*, 131(2) :219–247, 2006.
 - [FJ03] Charles Favre and Mattias Jonsson. Brolin’s theorem for curves in two complex dimensions. *Ann. Inst. Fourier*, 53(5) :1461–1501, 2003.
 - [FLM83] Alexandre Freire, Artur Lopes, and Ricardo Mañé. An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 14(1) :45–62, 1983.
 - [FS94] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimension. I. In *Complex analytic methods in dynamical systems. Proceedings. IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, January 1992*, pages 201–231. Paris : Société Mathématique de France, 1994.
 - [FS95] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimension. II. In *Modern methods in complex analysis. The Princeton conference in honor of Robert C. Gunning and Joseph J. Kohn. Mar. 16-20, 1992*, pages 135–182. Princeton University Press, 1995.
 - [Gou15] Sébastien Gouëzel. Limit theorems in dynamical systems using the spectral method. In *Hyperbolic dynamics, fluctuations and large deviations. Special semester on hyperbolic dynamics, large deviations and fluctuations, EPFL. Proceedings*, pages 161–193. American Mathematical Society, 2015.
 - [HP94] John H. Hubbard and Peter Papadopol. Superattractive fixed points in $\mathbb{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(1) :321–365, 1994.
 - [Kat79] Anatole Katok. Bernoulli diffeomorphisms on surfaces. *Ann. Math. (2)*, 110 :529–547, 1979.
 - [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encycl. Math. Appl.* Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1995.
 - [Lyu83] Mikhail Lyubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(3) :351–385, 1983.
 - [RS97] Alexander Russakovskii and Bernard Shiffman. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J.*, 46(3) :897–932, 1997.