CORSO: **Teoria della Misura**
CODICE ESAME: **219AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
NUMERO DI ORE: **42**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
ANNO ACCADEMICO: **2024-25**
SEMESTRE: **primo**
CORSO DI STUDIO: **laurea magistrale in Matematica (WMA-LM)**

Obiettivi formativi. La teoria della misura è uno strumento fondamentale in diverse aree della matematica, in particolare nella teoria della Probabilità e in diverse sotto-aree dell'Analisi, per esempio il Calcolo delle Variazioni e la Teoria Geometrica della Misura. Lo scopo di questo corso è fornire le nozioni elementari e avanzate di teoria della misura necessarie ad affrontare i corsi avazanti nelle suddette aree, al di là delle nozioni minimali introdotte nel corso di "Analisi 3".
Anche se fa parte della laurea magistrale, questo corso è accessibile a studenti del terzo anno della laurea triennale.

Programma del corso [versione: 30 dicembre 2024].
Le parti non fondamentali sono riportati in corsivo.

1. MISURE POSITIVE.
   - Definizione di σ-algebra, proprietà elementari; operazioni sulle sigma algebre; σ-algebra generata da una famiglia di insiemi; σ-algebra di Borel.
   - Funzioni misurabili; proprietà elementari.
   - Misure σ-additive su una σ-algebra, proprietà elementari, massa. Operazioni sulle misure: somma (anche infinita), inviluppo superiore ed inferiore.
   - Definizioni sparse: misure di Borel e di Radon, misure regolari (specificando: regolari dall'esterno, regolari dall'interno) rispetto ad una sotto-σ-algebra o a una famiglia di insiemi. Casi significativi: misure regolari dall'esterno sugli aperti, regolari dall'interno sui chiusi, Borel-regolari.
   - Nozione di completezza di una σ-algebra rispetto ad una misura; completamento di una σ-algebra ed estensione della misura al completamento. Gli spazi L^p costruiti sul completamento di una misure coincidono con quelli costruiti sulla misura di partenza.

2. INTEGRAZIONE.
   - Integrazione delle funzioni misurabili a valori positivi. Teorema di convergenza monotona (di Beppo Levi) e lemma di Fatou.
   - Integrazione di funzioni a valori reali estesi; teorema di convergenza dominata (di Lebesgue).
   - Funzioni sommabili a valori reali o vettoriali (incluse quelle a valori in uno spazio di Banach separabile); spazio delle funzioni L^1 a valori reali o vettoriali; completezza di L^1.
   - *Costruzione dell'integrale per funzioni a valori in uno spazio di Banach separabile (integrale di Bochner). Teorema di convergenza dominata.*

3. MISURE ESTERNE
   - Definizione di misura esterna μ su un insieme; insiemi μ-misurabili (secondo Caratheodory); teorema di Caratheodory sulla misurabilità dei Boreliani.
   - Costruzione di una misura esterna a partire da una classe di insiemi e da una funzione di gauge (costruzione di Caratheodory). Esempio chiave: costruzione della misura di Lebesgue.
   - Misura di Hausdorff d-dimensionale su uno spazio metrico; proprietà elementari. Dimensione di Hausdorff.

4. LEMMA DI DYNKIN E APPLICAZIONI
   - Definizione di λ-sistema e lemma di Dynkin.
   - *Definizione di classe monotona e teorema delle classi monotone.*
   - Applicazioni: una misura finita è univocamente determinata dai valori su una classe di generatori chiusa per intersezione; regolarità delle misure di Borel (finite e localmente finite).

5. Misure prodotto
   - Definizione di misura prodotto; costruzione del prodotto di due misure σ-finite; teorema di Fubini-Tonelli.
   - Teorema di Fubini-Tonelli per il completamento della misura prodotto; la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{m+n}$ è il completamento del prodotto della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^m$ per la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^m$; teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.
   - *Prodotto infinito di misure di probabilità (costruzione solo per misure di Borel su compatti).*

6. Teorema di Radon-Nikodym
   - Nozione di misura singolare rispetto ad un'altra, e di misura assolutamente continua rispetto a un'altra; decomposizione di Hahn.
   - Teorema di Radon-Nikodym.

7. Misure a valori reali o vettoriali
   - Preliminari: convergenza incondizionata e convergenza assoluta per serie a valori in uno spazio di Banach; equivalenza di convergenza incondizionata e convergenza assoluta per spazi di dimensione finita.
   - Misure a valori reali o a valori in uno spazio normato (tipicamente di dimensione finita). Misura variazione; finitezza della massa; rappresentazione di una misura vettoriale come prodotto ddella misura variazione per una densità a valori vettoriali (unitari). Integrazione rispetto ad una misura a valori reali o vettoriali. Lo spazio di Banach delle misure.

8. Convergenza debole di misure (positive o a valori reali)
   - Misure di Borel a valori reali su uno spazio compatto X; identificazione di tali misure con gli elementi del duale dello spazio delle funzioni continue su X (teorema di Riesz); convergenza debole e compattezza delle misure; proprietà di una successione di misure positive e finite che convergono debolmente (continuità della massa, semicontinuità inferiore delle misure degli aperti e degli integrali delle funzioni s.c.i., semicontinuità superiore delle misure dei chiusi, ecc.).
   - Estensione dei risultati nel paragrafo precedente al caso di misure finite, positive e di Borel su uno spazio spazio localmente compatto, e al caso di misure di Borel a valori reali o vettoriali su uno spazio spazio compatto.
   - Famiglie di misure "tese": teorema di compattezza di Prokhorov e proprietà della convergenza debole.

9. Complementi
   - Le funzioni integrabili secondo Riemann su un intervallo sono integrabili secondo Lebesgue, e i due integrali coincidono.
   - Immagine (push-forward) di una misura secondo una mappa misurabile; integrazione rispetto alla misura immagine.
   - *Identificazione del duale di L^p con L^q nel caso $1 \leq p < \infty$.*
   - *Disintegrazione di una misura (rispetto ad una mappa).*

Prerequisiti. È necessaria una chiara comprensione della teoria dell'integrazione secondo Riemann (corso di "Analisi 1") e delle nozioni di base di algebra lineare (corso di "Geometria 1") e di topologia generale, in particolare in spazi metrici (corsi di "Geometria 2" e "Analisi 2").
A partire da quest'anno le nozioni di base di teoria della misura ed integrazione secondo Lebesgue vengono esposte nelle prime lezioni del corso di "Analisi 3" che si svolge in parallelo: si raccomanda fortemente agli studente che non hanno già tali basi di seguire queste lezioni.
In alcuni punti del corso risultano utili alcune nozioni di teoria degli insiemi e di analisi funzionale, che verranno richiamate dal docente al momento opportuno.

Testi di riferimento. Il corso non segue un testo particolare. La maggior parte degli argomenti trattati sono tuttavia coperti da testi standard di teoria della misura, quali per esempio:

- L. Ambrosio, G. Da Prato, A. Mennucci: *Introduction to measure theory and integration.* Lecture Notes of the Scuola Normale Superiore di Pisa. Edizioni della Normale, Pisa, 2011.

- V.I. Bogachev: *Measure theory, volume 1.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- L.C. Evans, R.F. Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions, revised edition.* Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 2015.
- P.R. Halmos: *Measure Theory.* Van Nostrand Co., New York, 1950.
- E.M. Stein, R. Shakarchi: *Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton Lectures in Analysis 3. Princeton University Press, 2005.

Modalità d'esame. L'esame consiste di una prova orale sugli argomenti nel corso (definizioni, enunciati e dimostrazioni) accompagnata dalla risoluzione di alcuni esercizi teorici, per esempio i dettagli delle dimostrazioni lasciati per esercizio durante il corso.
La data dell'esame viene concordata individualmente con ogni studente. Si chiede tuttavia agli studenti interessati di iscriversi all'appello di gennaio 2025, a prescindere da quando intendono dare l'esame (link per l'iscrizione agli esami).

Comunicazioni e materiale didattico Per le comunicazioni riguardanti il corso e gli esami e il materiale didattico viene utilizzata la piattaforma MS Teams dellUniversit‘a di Pisa (link al team). Sul team del corso sono anche disponibili le registrazioni delle lezioni.