Corso di Analisi matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2020-21

Esercizi-1

---

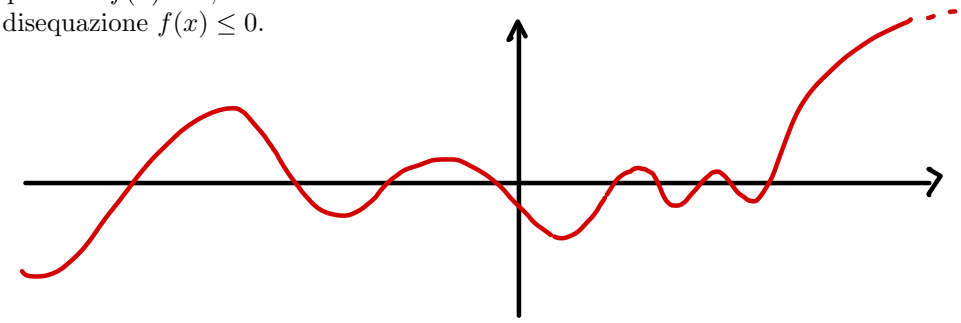
1. Disegnare il grafico delle funzioni date della formula:

   (a) $x^2 - 2$;
   (b) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$;
   (c) $-x^2$;
   (d) $-x^3 + 1$;
   (e) $-(x^3 + 1)$;
   (f) $2x^2 + 4x + 2$;
   (g) $(2x + 4)^2$.

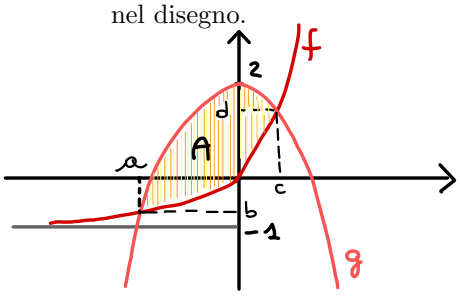
2. Disegnare il grafico delle funzioni date della formula:

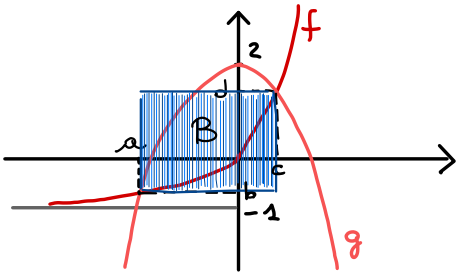
   (a) $e^{|x|} - 1$;
   (b) $|1 - e^x|$;
   (c) $\log(1 + |x|)$;
   (d) $\log|1 + x|$;
   (e) $|\log(x)| + 1$;
   (f) $\log|x| + 1$.

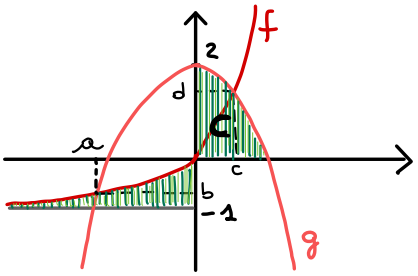
3. Dato il grafico della funzione f rappresentato nel disegno risolvere graficamente:
   (a) l'equazione $f(x) = 0$;
   (b) la disequazione $f(x) \leq 0$.



4. Descrivere in termini di disuguaglianze gli insieme di punti del piano A, B, C rappresentati nel disegno.







5. Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$|(x-1)^2 - 1| = a\,.$$

   Trovate la soluzione a questo esercizio negli appunti della lezione 5.

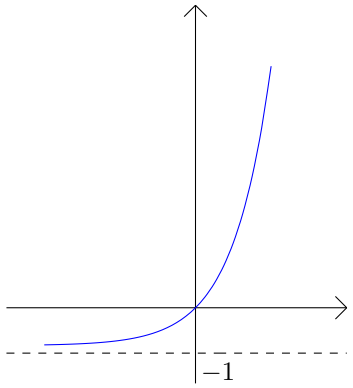
6. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq \sin(x)$.

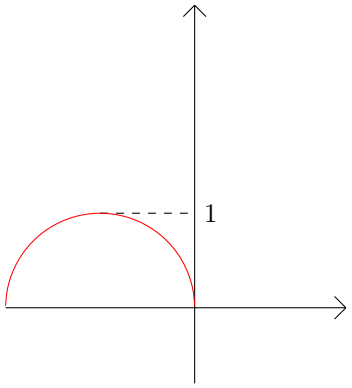
7. Disegnare il grafico di $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ e risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq x$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x+1|} \leq y \leq -\sin(x)$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x+1|} \leq -\sin(x)$.

10. Proporre una formula per i seguenti grafici:





11. Trovare i valori dei due parametri reali a e b per cui $a \sin x + bcosx$ si puo' scrivere come $-4\cos(x - \frac{\pi}{3})$.

12. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ comprese tra 0 e 2π.

13. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \leq \sqrt{3}$ comprese tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

14. Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che siano verificate le seguenti identità:

    (a) $\sin(x + \frac{3}{2}\pi) = \cos(x + \alpha)$;
    (b) $\sin(2x - \alpha) = -\cos(2x)$.

15. Dato un rombo di lato 1 scrivere una formula per calcolare la somma delle sue diagonali in funzione di un suo angolo α.

Corso di Analisi matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2020-21

Esercizi-2

---

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   (a) $x = -2$, $y = 2$; $\quad \rho = \ldots\ldots$, $\alpha = \ldots\ldots$;
   (b) $x = 0$, $y = -4$; $\quad \rho = \ldots\ldots$, $\alpha = \ldots\ldots$;
   (c) $\rho = 2\sqrt{3}$; $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; $\quad x = \ldots\ldots\ldots$, $y = \ldots\ldots\ldots$;
   (d) $\rho = 2$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\quad x = \ldots\ldots\ldots$, $y = \ldots\ldots\ldots$
   Per le coordinate polari indicare un angolo compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\cos(x) = \frac{1}{3}$.

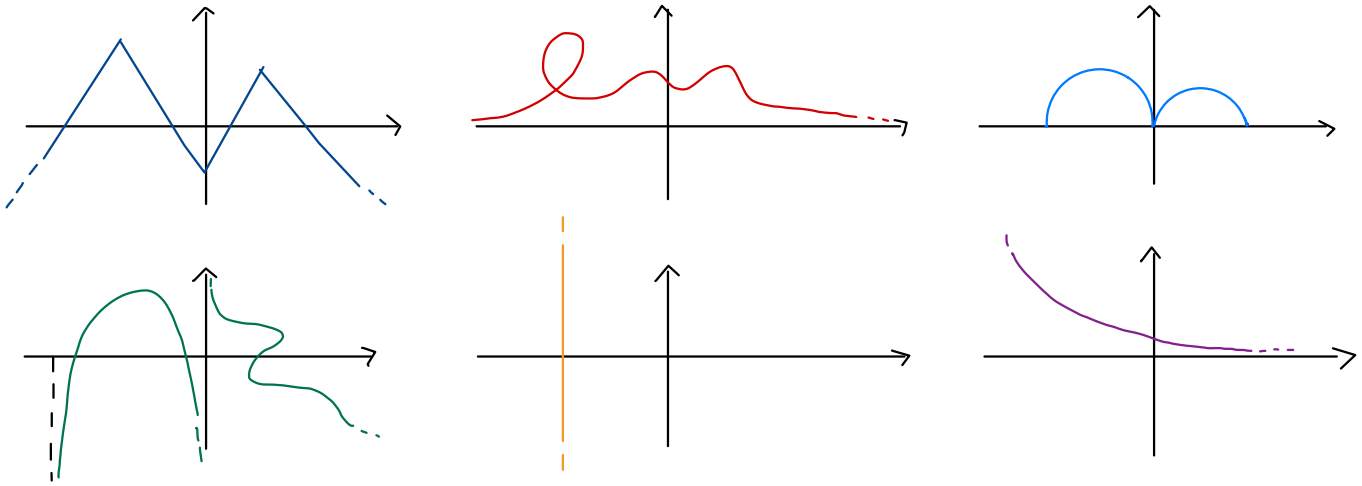
4. Trovare tutte le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \leq 1$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

5. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos(x) - \frac{1}{2}} \geq 0\,.$$

6. Determinare k e t in modo che $y = \sin(kx) + t$ abbia periodo 2 e passi per il punto $P\,(\frac{3}{2}, 0)$.

7. Dire quali tra i seguenti disegni potrebbero essere grafici di funzioni.



8. Disegnare la curva $x - y^2 - 3y = 0$. Dire se è un grafico del tipo $y = f(x)$.

9. Determinare l'insieme di definizione di:

   (a) $f(x) = \arcsin(x^2 - 3) + \log(x)$;

   (b) $f(x) = \log(\log(\log(x)))$;

   (c) $f(x) = \dfrac{\tan(x + \frac{\pi}{4})}{\arctan(x^2 - 1)}$;

   (d) $f(x) = \dfrac{x + 3}{6x^3 + 30x^2 - 33x + 18}$;

(e) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-2x}} + \sqrt{\frac{x+1}{9-x^2}}$;

(f) $f(x) = x^2 + \sqrt{-\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|}$.

10. Determinare l'immagine di:

    (a) $f(x) = e^{-x} + 3$;

    (b) $f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

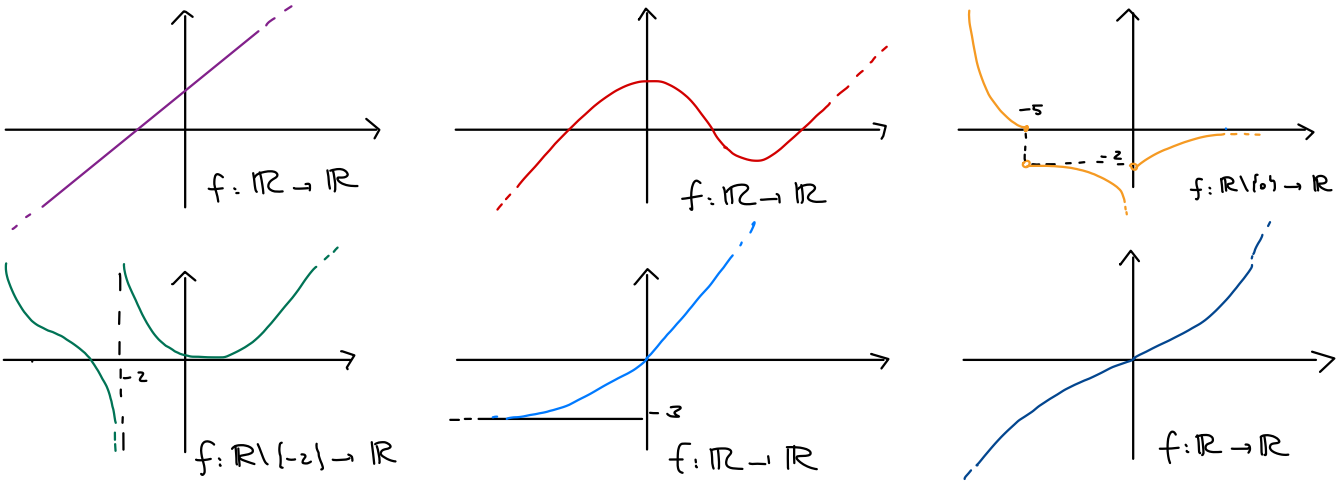
    (c) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$.

    Suggerimento: disegnare il grafico.

11. Disegnare $f(x) = 2\cos(\frac{x}{2})$ e $g(x) = -3\sin(2x)$.
    Determinare l'immagine e il periodo di f e g.

12. Disegnare $|\cos(\pi x)| - 2$. Determinare immagine e periodo.

13. I seguenti disegni rappresentano grafici di funzioni. Determinare quali sono iniettive e quali sono suriettive.



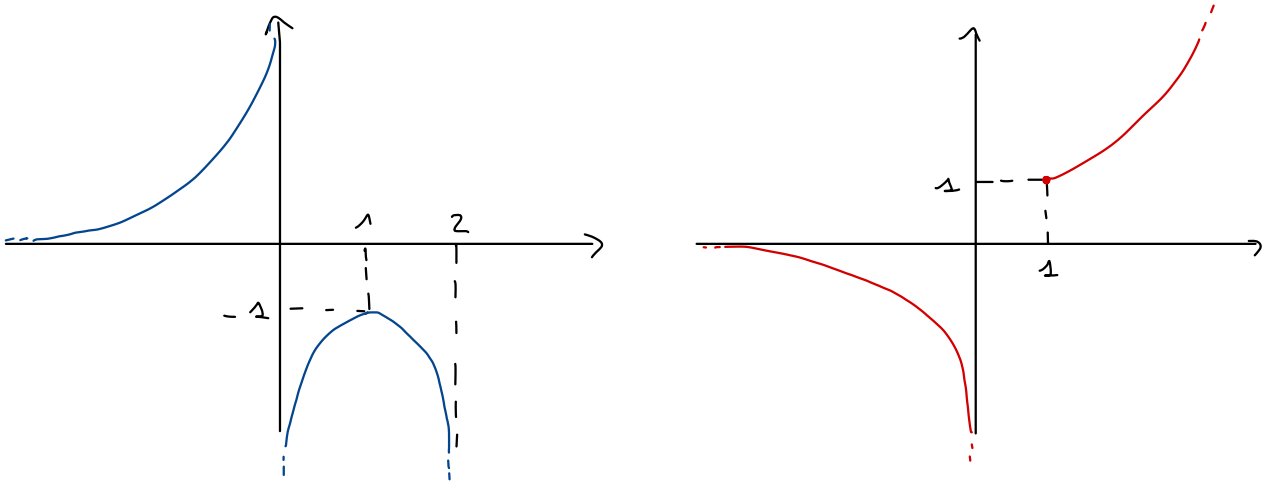
14. Dire se le seguenti funzioni sono iniettive/suriettive/biiettive:

    (a) $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to [0, +\infty) \\ x \mapsto e^{-x} - 2 \end{cases}$ (b) $g: \begin{cases} [2\pi, 4\pi) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x) \end{cases}$ (c) $h: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-5}{x+3} \end{cases}$

15. Determinare, se è possibile, la funzione inversa di:
    (a) $f(x) = \sqrt{1-2x}$;
    (b) $f(x) = \log_3(x+1)$.

16. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$ modificare dominio e codiminio affinchè sia iniettiva e suriettiva. Calcolare l'inversa della funzione modificata.

17. I seguenti disegni rappresentano grafici di funzioni. Determinare dominio, immagine e scrivere i limiti rilevanti.



Corso di Analisi matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2020-21

Esercizi-3

---

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione

- $[f(x) = \dfrac{\log|1-\sin(2x)|}{\sqrt{\cos x + 2}}$,
- $f(x) = \arctan\left[\log\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$,
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\log\left(2+x^2\right)}$,
- $f(x) = \log\left(x|x| - 2x + 3\right)$,
- $f(x) = e^{\sqrt{|x^2-2x-3|}}$,
- $f(x) = \log\left(|x-1| - \dfrac{x}{2} - 1\right)$.

2. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - (a+a^2)x + a^3}$ è tutto $\mathbb{R}$.

3. Trovare dominio, immagine di $y = \sqrt{\sin(x) - 1}$ e disegnarne il grafico.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2 e^{-x}$,
- $f(x) = 2^{6x}/4^{2x}$,
- $f(x) = \dfrac{e^{\log(x^2-4)}}{x-2}$,
- $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$,
- $f(x) = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,
- $f(x) = \log_3\sqrt{x+2}$,
- $f(x) = \dfrac{3^{x-1}}{9^{x-3}}$,
- $f(x) = \dfrac{4^{x+2}}{2^{3x+1}}$,
- $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)x^3$,
- $f(x) = \sqrt{\log(3x-4)^2}$,
- $f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})$,
- $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$,
- $f(x) = \dfrac{e^{2x+4x^2}\cos(x)}{x}$,
- $f(x) = 3^x + 3^{\sin x}$,
- $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$,
- $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x-2}$,
- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x^3+2}$,
- $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 2x^3 + x}$,
- $f(x) = \log\log x^2$,
- $f(x) = \cos(2x) + 3x^2$,
- $f(x) = \sqrt[5]{(\sin x)^3}$,
- $f(x) = \dfrac{\cos(3x^2+1)}{2x-3}$,
- $f(x) = \exp(1+x^2)$,
- $f(x) = \log(\dfrac{e^{x+1}}{x^2-1})$,
- $f(x) = x\arcsin(x)$,
- $f(x) = \log(1+\tan(x))$,
- $f(\tan(x))$,
- $f(x) = \arcsin(3x^2+4)$,
- $f(x) = \dfrac{2^{x+2}}{4^{x+1}}$,
- $f(x) = \dfrac{e^x + 6x}{x - x^2}$,
- $f(x) = 2x^{\sin x}$,
- $f(x) = -\dfrac{1}{x^2+4x+6}$,
- $f(x) = xe^{3x}$.

5. Sia $f(t) = t^2 + t^{\frac{1}{2}}$ quanto vale $f'(4)$?

6. Sia $F(x) = f(g(x))$. Siano $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, $g'(5) = 6$, trovare $F'(5)$.

7. Sia $f(x) = x^5 + x + 1$ e $g(x)$ la sua funzione inversa. Quanto vale $g'(1)$?

   Suggerimento: non serve calcolare esplicitamente l'inversa.

8. Sia $f(x) = \frac{5}{2}x^2 - e^x$. In quale valore di x risulta $f''(x) = 0$?

   Notazione: f'' è la derivata seconda: la derivata della derivata.

9. Per quale valore di $c \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua in $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x, \text{ se } x < 2 \\ 2x + 4, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

10. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ ax^2 + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

11. Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ e data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c \\ ax + b & \text{se } x > c \end{cases}$ determinare a e b in funzione di c, in modo che esista $f'(c)$.

12. Dire se ci sono punti in cui $f(x) = |x^2 - 1|$ non è derivabile.

13. Scrivere la retta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ in $x = -3$.

14. Trovare $k \in \mathbb{R}$ e $x_0 > 0$ tali che la retta $y = kx$ è tangente in x_0 a $y = e^x$.

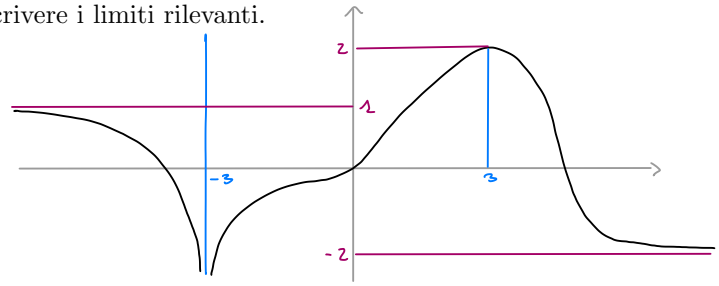
15. Sappiamo che la retta tangente al grafico di una certa funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = -1$ ha equazione $y = 2x$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x) := f(-1/x^2)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

Corso di Analisi matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2020-21

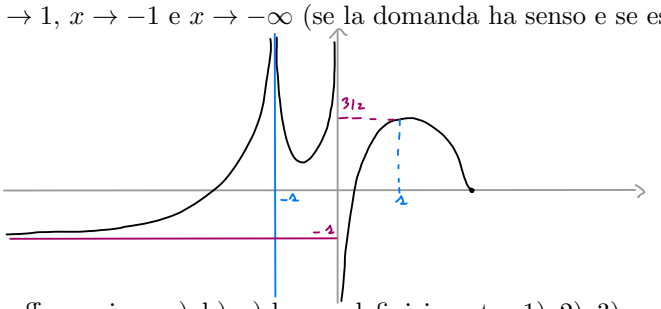
Esercizi-4

---

1. Dato il grafico della funzione f disegnato nella seguente figura, trovare dominio di f, immagine di f e scrivere i limiti rilevanti.



2. Sulla base del grafico disegnato nella seguente figura, dire quali sono i limiti di $f(x)$ per $x \to \infty$, $x \to 0$, $x \to 1$, $x \to -1$ e $x \to -\infty$ (se la domanda ha senso e se esistono).



3. Associare ad ogni affermazione a)–b)–c) la sua definizione tra 1)–2)–3):
   a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ con $x_0, \ell \in \mathbb{R}$;
   b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
   c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$.

   1) $\forall M \in \mathbb{R}\,, \exists\, x_M \in \mathbb{R}$ tale che $x \le x_M \implies f(x) \ge M$;
   2) $\forall \varepsilon > 0\,, \exists\, x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che $x \ge x_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| \le \varepsilon$;
   3) $\forall \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \ne x_0$ con $|x - x_0| \le \delta_\varepsilon$ vale $|f(x) - \ell| \le \varepsilon$.

4. Vero o falso?
   A- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.
   B- Sia $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in X$. Se f è continua in x_0, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   C- Sia $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in X$; f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   D- Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = b$ con $a \ne b$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ vale a o b.
   E- Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = b$ con $a \ne b$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste.

5. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 5 (in 0) di $\tan(x)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 (in 0) di $\sqrt[3]{1 - 9x^3}$.

7. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 10 (in 0) di $\sin(2x^2)$.

8. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 (in 0) di $\log(1 - 2x^2)$.

9. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 11 (in 0) di $x \sin(-2x^2)$.

10. Riordinare le funzioni in modo da ottenere un'affermazione corretta, per $x \to +\infty$:
    - $\dfrac{x^4}{x^2+1} \ll \log(x+1) \ll \dfrac{2^x}{3^x} \ll x^3$,
    - $2^x + x^2 \ll \dfrac{\log x}{x^2} \ll \dfrac{2x}{1+x^3} \ll x2^x$.
11. Calcolare la parte principale, per $x \to 0$, di:
    - $\sin(x) - x^2$;
    - $\sin(x^2) - x^2$;
    - $(\sin(x))^2 - x^2$;
    - $\exp(2x^3)$;
    - $\exp(2x^3) - \exp(3x^2)$;
    - $4\sin(x^2) - \log(1+4x^2)$;
    - $\dfrac{\log(1+x^4)}{\sin(x^8)}$;
    - $\dfrac{\cos(x^3)}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;
    - $\sqrt[3]{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}$.
12. Dire per quali a la funzione $f(x) = x^5$:
    - è $O(x^a)$;
    - è $o(x^a)$;
    - è $O(x^{a+1})$;
    - è $o(x^{a+1})$.
13. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\sin(x^2 + x^3) = O(x^a)$ per $x \to 0$.
14. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $e^x - 1$ è $o(x^a)$ per $x \to 0$.
15. Trovare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la parte principale per $x \to 0$ di $\cos(x^2) - 1 + x^a$.
16. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 - \sqrt{2 - e^{-4x^2}}$ e di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

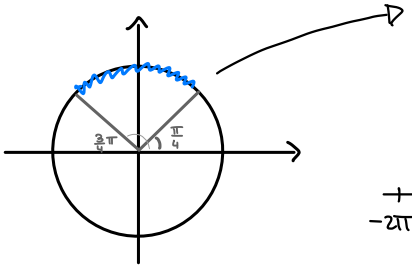
Lezione 30 - seconda parte

Alcuni esercizi in preparazione del compitino

Es 1) Trovare le soluzioni di $\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $[\frac{1}{2}, 2]$.

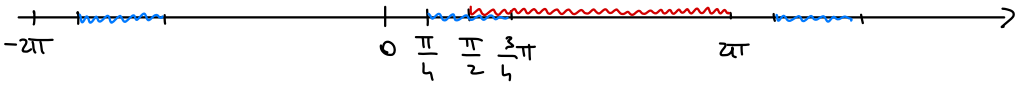
Svolgimento: I° metodo: Cambio di variabile $y = \pi x$. Modifico anche l'intervallo in cui cerco le soluzioni. Una volta trovate le soluzioni nel nuovo intervallo scrivo le soluzioni cercate usando il cambio di variabile $x = \frac{y}{\pi}$.

- $y = \pi x$. Se $x = \frac{1}{2}$, allora $y = \frac{\pi}{2}$; se $x = 2$ allora $y = 2\pi$. Quindi cerco le soluzioni di di $\sin(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.



$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

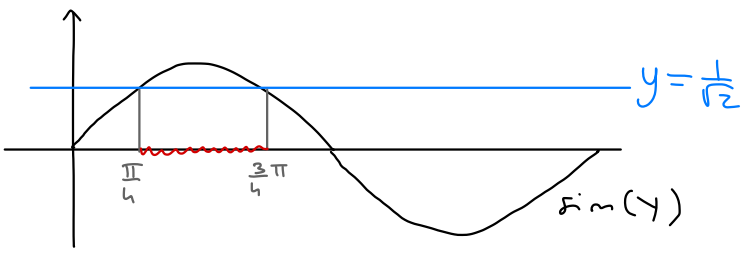
da intersecare con $\frac{\pi}{2} \leq y \leq 2\pi$.



$\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3}{4}\pi$

Soluzione: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

II° metodo: Cambio di variabile $y = \pi x$. Trovo le soluzioni di $\sin(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cambio variabile, trovo le soluzioni di $\sin(\pi x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e intersecо con $[\frac{1}{2}, 2]$.



$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Cambio di variabile $y = \frac{x}{\pi}$

$\frac{1}{4} + 2k \leq x \leq \frac{3}{4} + 2k$ $k \in \mathbb{Z}$

Le soluzioni sono $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

Es 2) Trovare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f(x) = \arctan(x^3 - x)$ relativamente alla semiretta $(-\infty, 1]$.

Svolgimento:

PASSO I)

$$f(1) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x^3 - x) = -\frac{\pi}{2}$$

PASSO II)

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^3 - x)^2} \cdot (3x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

PASSO III) Confronto $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f(0)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\inf} < \arctan\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) < 0 < \underbrace{\arctan\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}_{\max}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad f(0) \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Il punto di massimo è $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il punto di minimo non esiste.

Corso di Analisi matematica I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2020-21

Esercizi-5

---

1. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali dire se sono a variabili separabili, lineari del primo ordine, lineari del secondo ordine, o altro; nel caso di quelle lineari specificare se sono omogenee e/o a coefficienti costanti:

   a) $\dot{x}x^2 = t$, b) $\dot{x} - 2x^2 = t$, c) $\dot{x} - 2x^2 = 0$, d) $\ddot{x} = tx + e^t$, e) $\ddot{x} + t\dot{x} + 3t^2 x = 0$,

   f) $\ddot{x} = t^2 x$, g) $\ddot{x} = 3x + 4\dot{x}$, h) $\dot{x} = -2x + e^t$, i) $\dot{x} = x^2 + t^2$, l) $\ddot{x} = tx$.

2. Verificare le seguenti affermazioni (senza ricorrere ad alcuna formula risolutiva):

   a) $x(t) := \sin^2 t$ risolve l'equazione $\dot{x}^2 = 4x(1-x)$;

   b) $x(t) := (t+c)^{-2}$ risolve l'equazione $\dot{x}^2 = 4x^3$ per ogni $c \in \mathbb{R}$;

   c) $x(t) := \log t$ risolve l'equazione $\ddot{x}\, e^x + t^2 \dot{x}^3 = 0$;

   d) $x(t) := ce^{-t^2/2}$ risolve l'equazione $\ddot{x} = (t^2 - 1)x$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

   a) $\dot{x} = \dfrac{t}{x}$, b) $\dot{x} = x^2 + 1$, c) $\dot{x} = e^x \cos t$, d) $\dot{x} = e^t(x-1)$, e) $\dot{x} = t^2\sqrt{1-x^2}$.

4. a) Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1/2$.

   b) Cercare le soluzioni delle equazioni d) ed e) dell'esercizio precedente che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 1$.

5. Risolvere le seguenti equazioni lineari del primo ordine:

   a) $\dot{x} - 4x = 8$, b) $\dot{x} + 2tx = 0$, c) $\dot{x} + \dfrac{x}{t+1} = 6t$, d) $\dot{x} - e^t x = 0$.

6. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

7. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti:

   a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, b) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$, c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$, d) $\ddot{x} + 9x = 0$;

   e) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$, f) $\ddot{x} - 4x = 0$, g) $\dot{x} + 2x = 0$, h) $\dot{x} - 3x = 0$.

8. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

   a) $\begin{cases} \dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} \ddot{x} - 4x = 0 \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = -2 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$.

9. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} - 6x = 0$.

10. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := ae^{bt}$ risolve l'equazione $\ddot{x} - 4x = e^t$.

11. Verificare direttamente (cioè senza utilizzare alcuna formula risolutiva) le seguenti proprietà delle equazioni lineari omogenee del primo e secondo ordine, vale a dire quelle della forma $\dot{x} + a(t)\, x = 0$ oppure $\ddot{x} + a(t)\, \dot{x} + b(t)\, x = 0$:

    a) Se x_1 e x_2 sono soluzioni dell'equazione allora $x := x_1 + x_2$ è pure una soluzione;

    b) Se x_1 è una soluzione dell'equazione e $c \in \mathbb{R}$ allora $x := cx_1$ è pure una soluzione;

c) se i coefficienti a e b sono costanti, la funzione $x := e^{\lambda t}$ è una soluzione se λ risolve l'equazione caratteristica associata, vale a dire $\lambda + a = 0$ per quella del primo ordine e $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ per quella del secondo ordine.

12. Trovare una soluzione particolare $\tilde{x}$ per ciascuna delle seguenti equazioni lineari non omogenee seguendo le indicazioni della tabella data sopra (per le prime equazioni queste indicazioni sono esplicitate tra parentesi):

    a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = e^t$ $[\tilde{x} = ate^t]$, b) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 4e^t$ $[\tilde{x} = at^2e^t]$,

    c) $\dot{x} - 2x = 2t^2$ $[\tilde{x} = at^2 + bt + c]$, d) $\dot{x} + 2x = e^{-2t}$ $[\tilde{x} = ate^{-2t}]$,

    e) $\ddot{x} + 4x = \sin(2t)$ $[\tilde{x} = at\cos(2t) + bt\sin(2t)]$, f) $\dot{x} + x = 3t$,

    g) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t}$, h) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t\cos t$, i) $\dot{x} + 2x = 4\cos(2t)$.

13. Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine $\dot{x} + 2x = 2t - 3e^t$ risolvendo prima l'equazione omogenea associata e poi cercando una soluzione particolare di $\dot{x} + 2x = 2t$ ed una di $\dot{x} + 2x = -3e^t$.

14. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine $\dot{x} + 4x = 16t$ risolvendo prima l'equazione omogenea associata e poi trovando una soluzione particolare.

    b) Trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

15. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + x = e^{-2t}$.

    b) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

16. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 2x = 4 - 3\sin t + 2\sin(2t)$.

17. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi alle condizioni iniziali:

    a) $\begin{cases} \dot{x} = x^2\cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} \ddot{x} - x = 2t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} \dot{x} + 2x = 4 \\ x(0) = 1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} \dot{x} = 3t^2(1 + x^2) \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

18. a) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $x(t) := t^a$ risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti
$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}}{t} + \frac{2x}{t^2} = 0\,.$$
    b) Scrivere la soluzione generale di quest'equazione.

    c) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(1) = 0$ e $\dot{x}(1) = 1$.

19. a) Scrivere $x(t) := \sin t + \sqrt{3}\cos t$ nella forma $x(t) = r\sin(t + \varphi)$ per opportuni r e φ, e disegnarne il grafico.

    d) Scrivere $x(t) := e^{-t}(\sin t + \sqrt{3}\cos t)$ nella forma $x(t) = re^{-t}\sin(t + \varphi)$ per opportuni r e φ, e disegnarne il grafico.

20. Utilizzando il cambio di variabile $x = tz$ risolvere l'equazione differenziale
$$\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{t}{2x}\,.$$