Criterio del polinomio minimo

Sia A una matrice quadrata nxn e sia $m(x) \in \mathbb{R}[x]$ il suo polinomio minimo. Vogliamo dimostrare il seguente criterio.

Proposizione

Se $m(x)$ ha tutte radici reali e tutte di molteplicità 1 allora A è diagonalizzabile e viceversa.

Prova

Facciamo la prova per induzione sul numero k di autovalori distinti di A.

Iniziamo provando che ogni autovalore λ di A reale o complesso è radice di $m(x)$.

Sia infatti $v \in \mathbb{R}^n$ o $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore. Allora $m(A)v = 0 = m(\lambda)v$, come è facile provare. Essendo $v \neq 0$ deve essere $m(\lambda) = 0$.

Questo prova che A ha tutti gli autovalori reali, visto che sono tutti radici di m.

Passo base:

se $k = 1$, cioè $m(x) = x - a$ si deve avere $A - aI = O$ quindi $A = aI$ ed è diagonale.

Passo induttivo:

se la proposizione è vera per matrici quadrate con meno di k autovalori, allora è vera per matrici con k autovalori.

Supponiamo quindi che $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$.
Definiamo $W = Ker(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1})$ e osserviamo che poiché $m(A)$ è la matrice nulla, $Im(A - \lambda_k I) \subset W$ e quindi la sua dimensione è minore o uguale a quella di W. Conseguentemente

$n = \dim\, Ker(A - \lambda_k I) + \dim\, Im(A - \lambda_k I) \leq \dim\, Ker(A - \lambda_k I) + \dim\, W \leq n.$

Ora si ha

(1) W è invariante per A ossia $A(W) \subset W$.
(2) $W \cap Ker(A - \lambda_k I) = \{0\}$

Infatti se $w \in W$ si ha $(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1})(w) = 0$ e inoltre $(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1})A(w) = A(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1})(w) = 0$ per cui $A(w) \in W$.

Sia ora $v \in W \cap Ker(A - \lambda_k I)$. Allora $A(v) = \lambda_k v$ e $(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1})(v) = 0$. Ma $(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})v$ e poiché il coefficiente di v è diverso da 0 si deve avere $v = 0$.

Si ha quindi che $\dim\, W + \dim\, Ker(A - \lambda_k I) = \dim\, W + Ker(A - \lambda_k I) \leq n$
Dal conto precedente si deduce quindi che $\mathbb{R}^n = W \oplus Ker(A - \lambda_k I)$.

Ci resta solo da provare che l'applicazione lineare A ristretta allo spazio W, che chiameremo A' verifica l'ipotesi induttiva. In effetti per definizione di W il polinomio $n(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_{k-1})$ si annulla su A' e quindi gli autovalori di A' sono reali e ce ne sono meno di k. Il polinomio minimo di A' ha solo radici semplici e quindi A' è diagonalizzabile, cioè $W = \oplus_{i=1}^{k-1} Ker(A - \lambda_i I)$.

Finalmente $R^n = W \oplus Ker(A - \lambda_k I) = \oplus_{i=1}^{k} Ker(A - \lambda_i I)$ e quindi A è diagonalizzabile.

Per il viceversa basta osservare che i fattori di $m(A)$ commutano tra loro, cosa che abbiamo già usato quando abbiamo dimostrato che W è invariante per A. Ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ è somma di autovettori e ogni autovettore è annullato da un fattore di $m(A)$.