Lezione 29.10.2020

Principio di induzione.

Sia P una proprietà dei numeri naturali.

Vogliamo sapere per quali n $P(n)$ è vera

Se

1. $P(1)$ è vera
2. $\forall n \geq 1 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Allora $P(n)$ è vera per ogni n.

La prova è chiara. Se voglio $P(k)$:

$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \dots \Rightarrow P(k-1) \Rightarrow P(k)$$

Esempio:

Dimostrare che $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(1)$: $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ipotesi induttiva). Sommiamo ad ambo i membri $n+1$

$$1+\dots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n+1}{\cancel{2}}\left(\frac{n}{2}+1\right) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \quad \square$$

Altro esempio

$p(n)$: n bambini hanno gli occhi dello stesso colore

$p(1)$ OK.

$p(n) \Rightarrow p(n+1)$ Chiamiamo i bambini $b_1, -, b_{n+1}$

per ipotesi induttiva $b_1, -, b_n$ hanno gli occhi dello stesso colore. Anche $b_2 .. b_{n+1}$ verificano l'ipotesi induttiva. Dunque $b_1, -, b_{n+1}$ hanno gli occhi dello stesso colore.

DOVE È L'ERRORE?

Avete visto l'induzione nel teorema del completamento. Abbiamo fatto induzione sul numero di vettori indipendenti.

Ricordiamo la definizione di sottospazio

$U \subset V$ è sottospazio se

1. $v_1, v_2 \in U \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$

2 $a \in \mathbb{R}, v \in U \Rightarrow av \in U$

$\dim U \leq \dim V$. Infatti una base di U è fatta di k vettori indipendenti ($k = \dim U$) e $k \leq n$ perché non ci possono essere più di n vettori indipendenti.

③

Se U e W sono sottospazi di V, $U \cap W$ è ancora un sottospazio di V. Lo stesso vale se sono più di 2.

$(v_1 + v_2 \in U \cap W \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$

$v \in U \cap W,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow av \in V$ e $av \in W \Rightarrow av \in U \cap W)$

Invece $U \cup W$ non è sottospazio (esempio 2 rette in $\mathbb{R}^2$). Il più piccolo sottospazio che li contiene è $\operatorname{span}(U \cup W) = U + W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$.

Verificate che $U + W$ è un sottospazio di V.

Teorema di Grassmann

Siano U, W sottospazi di V

Allora $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

<u>Dim</u>. Sia $(v_1, \dots, v_p)$ una base di $U \cap W$.

Completiamo a base di U: $(v_1, \dots, v_p, u_{p+1} \dots u_q)$

" " " di W: $(v_1 \dots v_p, w_{p+1} \dots w_s)$

Naturalmente $p = \dim(U \cap W)$, $q = \dim U$, $s = \dim W$

- $v_1, \dots, v_p, u_{p+1}, \dots, u_q, w_{p+1} \dots w_s$ generano $U + W$ infatti se $u \in U$ e $w \in W$ $u + w$ è una comb. lineare di loro:

$$u = x_1 v_1 + \dots + x_p v_p + x_{p+1} u_{p+1} + \dots + x_q u_q$$
$$w = y_1 v_1 + \quad + y_p v_p + y_{p+1} w_{p+1} + \dots + y_s w_s$$

quindi $u+w$ è combinazione lineare di tutti i vettori accumulati che sono in numero di $q+s-p$. Se proviamo che sono indipendenti avremo $\dim(V+W) = q+s-p = \dim V + \dim W -$
$- \dim(V\cap W)$

Scriviamo una comb. lineare e imponiamo che dia $0 \in V$.

$$* \; a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + a_{p+1} u_{p+1} + \dots + a_q u_q + b_{p+1} w_{p+1} + \dots + b_s w_s = 0$$

Quindi

$$a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + a_{p+1} u_{p+1} + \dots + a_q u_q = -(b_{p+1} w_{p+1} + \dots + b_s w_s)$$

Il primo vettore $\in V$, il secondo $\in W$. Ma sono lo stesso vettore che quindi è in $V\cap W$.

Dunque $-(b_{p+1} w_{p+1} + \dots + b_s w_s) \in V \cap W$, è combinaz. lineare di $v_1, \dots, v_p$

$$-(b_{p+1} w_{p+1} + \dots + b_s w_s) = c_1 v_1 + \dots + c_p v_p$$

Quindi $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p + b_{p+1} w_{p+1} + \dots + b_s w_s = 0$

Ma $v_1 \dots v_p \, w_{p+1} \dots w_s$ è una base di W, i vettori sono indipendenti $c_1 = \dots = c_p = b_{p+1} = \dots = b_s = 0$

Dunque in $*$ tutti i $b_{p+1}, \dots, b_s$ sono nulli e quindi $a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + a_{p+1} u_{p+1} + \dots + a_q u_q = 0$ ci dà $a_1 = a_2 = \dots = a_q = 0$ perché i vettori sono indipendenti, perché sono una base di U.

Se $U \cap W = \{0\}$ diciamo che U e W sono in somma diretta e scriviamo $U + W = U \oplus W$.

Più in generale se $V_1, \dots, V_s$ sono sottospazi di V, scriveremo $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$ se

V_1 e V_2 sono in somma diretta

$V_1 \oplus V_2$ e V_3 sono in somma diretta

$\vdots$

$V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{s-1}$ e V_s sono in somma diretta

Esempi: Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ allora

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$$

In generale un SUPPLEMENTARE di $U \subset V$ è un sottospazio W tale che $V = U \oplus W$.

W non è unico e si può trovare con il completamento. Presa base $(u_1, \dots, u_q)$ di U, si completa a base di V $(u_1, \dots, u_q, v_{q+1}, \dots, v_n)$

$W = \mathrm{span}(v_{q+1}, \dots, v_n)$.

APPLICAZIONI LINEARI

$T : V \longrightarrow W$, V, W $\mathbb{R}$-spazi vettoriali è LINEARE se verifica

- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
- $T(av) = a\,T(v)$.

Esempi: se $A \in M(p, q, \mathbb{R})$ A definisce una applicazione lineare $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$

$$AX = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_q \end{pmatrix} = x_1 A^1 + \cdots + x_q A^q$$

$V = \{$funzioni differenziabili $[0,1] \to \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} V &\to V \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$ la derivata è lineare

$$\begin{aligned} M(p,q) &\to M(q,p) \\ A &\longmapsto A^T \end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ \pi & 23 \\ 61 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 61 \\ 14 & 23 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & 61 \\ 14 & 23 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ \pi & 23 \\ 61 & -7 \end{pmatrix}$$

Se $B = (b_{ij}) = A^T$ ~~allo~~ e $A = (a_{hk})$ allora le equazioni dell'applicazione "trasposta" sono

$$\{ b_{ij} = a_{ji} \quad i = 1, \dots, q,\ j = 1, \dots, p \}$$

un sistema lineare diagonale con $p \cdot q$ pivots

Se $T: V \to W$ è lineare ci sono 2 sottospazi uno di V, uno di W associati a T.

- $\mathrm{Ker}\,T$ = nucleo di $T = \{v \in V : T(v) = 0 \in W\}$
- $\mathrm{Im}\,T$ = immagine di $T = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ e } w = T(v)\}$

Se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V

$\mathrm{Im}\,T = \mathrm{span}(T(v_1), \dots, T(v_n))$. Infatti ogni $v \in V$ si scrive come combinazione lineare $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Quindi

$$w = T(v) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$$

Quindi, come span, è un sottospazio di W

$\mathrm{Ker}\,T$ è un sottospazio perché è chiuso per somma e prodotto per un numero

$$T(v_1) = 0,\ T(v_2) = 0 \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

$$T(v) = 0,\ a \in \mathbb{R},\ T(av) = aT(v) = a \cdot 0 = 0$$

Applicazioni lineari $T: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$

Sia $v \in \mathbb{R}^q$ e sia $(e_1, \dots, e_q)$ la base canonica di $\mathbb{R}^q$ $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_q \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_q e_q$. Dunque

$$T(v) = x_1 \underset{\mathbb{R}^p}{\underset{\cap}{T(e_1)}} + \dots + x_q \underset{\mathbb{R}^p}{\underset{\cap}{T(e_q)}}$$

Poniamo $T(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{p1} \end{pmatrix}, \dots, T(e_q) = \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{pq} \end{pmatrix}$

Allora se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$

$$Av = x_1 A^1 + \cdots + x_q A^q =$$
$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{p1} \end{pmatrix} + \cdots + x_q \begin{pmatrix} a_{1q} \\ a_{pq} \end{pmatrix} =$$
$$= x_1 T(e_1) + \cdots + x_q T(e_q) =$$
$$= T(x_1 e_1 + \cdots + x_q e_q) = T(v)$$

Quindi ogni appl. lineare $T: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ è data da una matrice $T(v) = Av$ dove le colonne di A sono le p-uple ~~che~~ immagine dei vettori della base canonica.

<u>Proposizione</u> Se T e S sono lineari
$T: V \to W$, $S: W \to U$
allora $S \circ T$ è lineare.

mora $v_1, v_2 \in V$ $\quad S \circ T(v_1 + v_2) = S(T(v_1 + v_2)) =$

$$= \underset{(T \text{ è lineare})}{S(T(v_1) + T(v_2))} = \underset{(S \text{ è lineare})}{S(T(v_1)) + S(T(v_2))} =$$

$$= S \circ T(v_1) + S \circ T(v_2)$$

$v \in V$ $a \in \mathbb{R}$ $\quad S(T(av)) = S(a T(v)) = a S(T(v))$
$$= a (S \circ T)(v).$$

Ma allora se abbiamo

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p \xrightarrow{B} \mathbb{R}^1$$

dove $A \in M(p,q,\mathbb{R})$ e $B \in M(1,p,\mathbb{R})$, $B \circ A$ è lineare e quindi deve essere una matrice $C \in M(1,q,\mathbb{R})$. Come è fatta C ?

Meditate e poi calcolate. Buona fortuna!