Lezione 7 9.11.2022 (1)

Definizione V, W spazi vettoriali di dim $< \infty$

$T: V \to W$ è LINEARE se

- $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- $T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

Esempio: se $A \in M(p, q, \mathbb{R})$ e per $X \in \mathbb{R}^q$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_q \end{pmatrix}$ definiamo

$$AX = x_1 A^1 + \dots + x_q A^q \in \mathbb{R}^p$$

$A: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ è lineare

Se T è lineare $T(\vec{0}) = \vec{0}$ e $T(-v) = -T(v)$ infatti $\vec{0} = 0 \cdot v$ $T(\vec{0}) = 0T(v) = \vec{0}$ e lo stesso $T(-v) = T(-1)v = -1T(v) = -T(v)$

Ci sono due applicazioni che esistono sempre

- l'appl. nulla $T(v) = 0 \quad \forall v \in V$
- l'appl identica

$$I: V \to V \qquad T(v) = v \quad \forall v \in V$$

<u>Osservazione</u>

Sia $(v_1, \dots, v_n)$ una base di V e definiamo arbitrariamente $w_1, \dots, w_n \in W$. Allora $\exists$ unica

$$T: V \to W \text{ lineare tale che } T(v_i) = w_i \quad i = 1, \dots, n$$

infatti ogni $v \in V$ si scrive (in modo unico)

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

e quindi $T(v) = \sum_i x_i T(v_i) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$

Corollario Le applicazioni lineari $T: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ sono matrici.

infatti: $T(e_1) = a_{11}\bar{e}_1 + \quad + a_{p1}\bar{e}_p$

$\vdots$

$T(e_q) = a_{1q}\bar{e}_1 + \quad + a_{pq}\bar{e}_q$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1q} \\ a_{p1} & & a_{pq} \end{pmatrix}$ $A : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$

verifico $Ae_1 = A^1 = T(e_1), \dots, Ae_q = A^q = T(e_q)$

Quindi $A = T$ sulla base $(e_1, \dots, e_q)$ di $\mathbb{R}^q \Rightarrow A = T$

~~Esempio Esempio $(v_1, \dots, v_n)$ base di V. Allora $\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$~~

~~$T : M(n,n,\mathbb{R}) \to$ ... $T : V \to W$ lineare~~

Def: $\ker T = \{ v \in V \mid T(v) = 0 \in W \} \subset V$

$\operatorname{Im} T = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ e } T(v) = w \} \subset W$

~~Nell'esempio $\ker \varphi_{\mathcal{B}} = \{\vec{0}\}$, $\operatorname{Im} \varphi_{\mathcal{B}} = \mathbb{R}^n$ $\varphi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo.~~

Prop: $T : V \to W$ lineare Allora

1) $\ker T$ è sottospazio di V, $\operatorname{Im} T$ è sottospazio di W

2) T è surgettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W$

3) T è iniettiva se $\ker T = \{0\}$

4) Se valgono 2 e 3 T è un isomorfismo e $\dim V = \dim W$.

<u>Prova</u> Che $\ker T$ sia sottospazio è facile

Vediamo $\operatorname{Im} T$: $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists v_1$ e v_2 tali che

$T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$. quindi

$$T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) = w_1+w_2 \in \operatorname{Im} T$$

Sia $a \in \mathbb{R}$ e $w \in \operatorname{Im} T$, $\Rightarrow \exists v \in V$ tale che $T(v) = w$

Ma allora $T(av) = aT(v) = aw \in \operatorname{Im} T$

Se $\operatorname{Im} T = W$ per ogni $w \in W$ $\exists v$ tale che $T(v) = w$ quindi T è su e viceversa.

Se $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ e $v_1 \neq v_2$ non può essere $T(v_1) = T(v_2)$ altrimenti $T(v_1 - v_2) = 0$ e $v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} T$.

Viceversa se T è iniettiva c'è un unico elemento che va in $0 \in W$, esso è lo zero di V. Essendo unico $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Esempio

$$T : M(n,n) \to M(n,n)$$

$T(A) = A + A^T$ verificare che è lineare.

Chi è $\operatorname{Ker} T$? $\operatorname{Ker} T = \{A \mid A + A^T = 0\} = \{A \mid A = -A^T\} =$

$= \{$matrici antisimmetriche$\}$

Chi è $\operatorname{Im} T$? $(A+A^T)^T = A^T + A$

quindi $\operatorname{Im} A \subseteq \{$matrici simmetriche$\}$

Ma se $A = A^T$ vediamo se $\exists B$ tale che $T(B) = A$

$B + B^T = A$ possiamo prendere $B = \frac{1}{2}A$

infatti $T\left(\frac{1}{2}A\right) = \frac{1}{2}T(A) = \frac{1}{2}(A+A^T) = \frac{1}{2}(2A) = A$

$\Rightarrow \operatorname{Im} T \supseteq \{$matrici simmetriche$\} \Rightarrow \operatorname{Im} T = \{$simmetriche$\}$

Ora calcoliamo le dimensioni di

$S = \{$matrici simmetriche$\}$ e $A = \{$matrici antisimmetriche$\}$

$A = A^T$

quindi A dipende da $(a_{n1}), (a_{n-1\,1}, a_{n2}) (\dots)$

$\dots \ (a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn})$

$\Rightarrow \dim S = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (per induzione!)

$\dim A = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n)}{2}$

Chi è $A \cap S$? solo la matrice nulla verifica

$$X = \pm X^T$$

Quanto fa $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\left[n + \cancel{1} + n - \cancel{1}\right] =$

$$= \frac{2n^2}{2} = n^2 = \dim M(n,n)$$

$\Rightarrow M(n,n) = A \oplus S = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$

Quindi ogni $B \in M(n,n)$ è somma di una simm. e una antisimm. Infatti

$$2B = B + B^T + B - B^T \qquad B = \frac{1}{2}(B + B^T) + \frac{1}{2}(B - B^T)$$

In particolare in questo caso abbiamo

$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim M(n,n)$.

Si chiama rango $rk(T)$ di T la dimensione di $\operatorname{Im} T$. In particolare per $A: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$

$rk A = \dim \operatorname{span}(A^1, \dots, A^q) = \dim \operatorname{Im} A$.

Teorema (della dimensione)

$T: V \to W$ applicazione lineare

Allora: $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$.

<u>Dim</u> Sia $(v_1, \dots, v_s)$ una base di $\operatorname{Ker} T$. Possiamo completarla a base di V: $(v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots v_n)$

$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(T(v_1), \dots, T(v_n)) = \operatorname{span}(T(v_{s+1}), \dots, T(v_n))$

perché i primi s vanno in $0 \in W$.

Dunque ci basta provare che i generatori $T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)$ sono indipendenti. Scriviamone una comb. lineare di loro ed imponiamo che sia il vettore nullo.

$$a_{s+1} T(v_{s+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0. \quad \text{Ma } T \text{ è lineare:}$$

$$T(a_{s+1} v_{s+1} + \quad + a_n v_n) = 0 \Rightarrow a_{s+1} v_{s+1} + \quad + a_n v_n \in \operatorname{Ker} T$$

$$\Rightarrow a_{s+1} v_{s+1} + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s \Rightarrow$$

$$b_1 v_1 + \quad + b_s v_s - a_{s+1} v_{s+1} - \dots - a_n v_n = 0 \in V$$

ma $(v_1, \dots, v_n)$ sono indipendenti $\Rightarrow b_1 = \dots = b_s = a_{s+1} = \dots = a_n = 0$

$\Rightarrow T(v_{s+1}) - T(v_n)$ è una base di $\operatorname{Im} T$ e $\dim \operatorname{Im} T = n - s$ $\square$

Corollario Sia $A \in M(p, q, \mathbb{R})$

Allora il numero di colonne indipendenti è uguale al numero di righe indipendenti.

Prova: Pensiamo A come applicazione lineare

$$A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$$

Sappiamo che $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{span}(A^1, \dots, A^q)$. Quindi il numero di colonne indipendenti è $r = \mathrm{rk}\, A$.

Il numero di righe indipendenti è $s =$ numero di pivots di una scala di A. Infatti Gauss ci dà una base di $\mathrm{span}(A_1, \dots, A_p)$.

$\mathrm{Ker}\, A = \{X \in \mathbb{R}^q \mid AX = 0\} =$ soluzioni del sistema omogeneo

$\dim \mathrm{Ker}\, A = \#$ variabili che non portano pivots $=$

$q - s$. Dunque $q - s + r = q \Rightarrow s = r$ $\square$