ALGEBRA LINEARE
Secondo Compito a casa 2020

AVVERTENZE

- Il presente testo è leggermente riformulato rispetto alla versione su e-learning.
- Le domande precedute da • presentano qualche difficoltà superiore alle altre.

Esercizio 1. Siano

$$v_1 = (1, -1, -1, 1), v_2 = (1, 1, -1, -1), v_3 = (1, -1, 1, -1), v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

vettori in $\mathbb{R}^4$.

- Mostrare che v_1, v_2, v_3, v_4 sono indipendenti.
- Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

  $$T(v_1) = v_3, \quad T(v_2) = v_4, \quad T(v_3) = v_1 + v_2, \quad T(v_4) = v_1 + v_3.$$

  Calcolare i trasformati dei vettori della base canonica.

Esercizio 2. Calcolare le coordinate del vettore $v = (0, 1, 2, 3, 4) \in \mathbb{C}^5$ rispetto alla base

$$(i, 0, 0, 0, 0),\ (i, i, 0, 0, 0),\ (i, i, i, 0, 0),\ (i, i, i, i, 0),\ (i, i, i, i, i).$$

Esercizio 3. Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ vettori di una base ortonormale del sottospazio definito dall'equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$. Trovare un vettore v_4 in modo tale che v_1, v_2, v_3, v_4 costituisca una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Provare chele coordinate di un vettore v in $\mathbb{R}^n$ nella base $\mathcal{B}$ sono $y_j =< v, v_j >, j = 1, \dots, n$.

Esercizio 5. Siano U, V i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti rispettivamente dalle equazioni

$$U = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad V = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e siano $U^\perp, V^\perp$ i loro ortogonali.

- Si mostri che esiste una unica applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ per cui $\ker T = U^\perp \cap V^\perp$ e $T : U + V \to U + V$ sia l'identità.

- Si trovi una base di $U + V$ costituita da elementi di $U \cap V$, $U \cap V^\perp$, $U^\perp \cap V$.

- Si scriva la matrice A che rappresenta T nella base canonica. Tale matrice viene simmetrica?

Esercizio 6. Per quali $k \in \mathbb{N}$ esiste una matrice A $n \times n$ per cui rango$A = k$ e $A^2 = O_{n\times n}$?

Esercizio 7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice B 3×3 e una matrice C 4×4 per cui si abbia

$$AB = O_4 \quad \text{e} \quad CA = O_3.$$

(La matrice O_n indica la matrice nulla $n \times n$.)

Esercizio 8. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Si calcolino $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $|\det(a + ib)|^2$.

•**Esercizio 9.** Sia $p(z) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado d e si considerino gli n polinomi $p_i(z) = p(z + \alpha_i)$, dove $\{\alpha\}_{1\le i\le n}$ è una famiglia di n elementi di $\mathbb{C}$.

Provare che

- Se $n \ge d + 2$ allora i polinomi p_i sono linearmente dipendenti.

- Se $n \le d + 1$ allora i polinomi p_i sono linearmente indipendenti se e solo se gli α_i sono a due a due distinti, cioè $\alpha_i \ne \alpha_j$ se $i \ne j$.

Esercizio 10. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & -1 & a^2+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

- Dire per quali a la matrice A è triangolabile.

- Dire per quali a la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 11. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -t & t-1 & t^2 \\ -1 & t+1 & 2t-2 & -t \\ 0 & 0 & t+1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$

- Se ne calcoli il determinante.
- Dire per quali t la matrice A ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$.

Esercizio 12. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare per cui $T^2 \neq 0$ e $T^3 = 0$. Mostrare che

- L'unico autovalore è 0.
- Si ha $\ker T \not\subseteq \ker T^2 \not\subseteq \ker T^3$
- T non è diagonalizzabile.

Esercizio 13. Sia r una retta in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine e P un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ per cui si abbia $\mathbb{R}^3 = r \oplus P$ e siano $v_1, v_2 \in P$.

- Mostrare che se v_1 e v_2 sono indipendenti allora esiste $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ per cui valga

  $$T(v_1) = v_2, T(v_2) = v_1 \text{ e } T(v) = v \text{ per } v \in r$$

  Mostrare inoltre che

  - T è univocamente determinata.
  - T è invertibile.
  - $\dim \ker(T - Id) = 2$
  - T è diagonalizzabile.

  e trovare tutti gli autovalori di T.

- Se v_1 e v_2 sono dipendenti esiste una T che soddisfi le condizioni al punto precedente? In caso positivo una tale T sarebbe invertibile? Sarebbe univocamente determinata?
- Si mostri che la retta r definita dalle equazioni $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ e i vettori $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, -1, 1)$ verificano le ipotesi generali e si scriva la matrice associata a T nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 14. Sia $T : \mathcal{M}(n) \to \mathcal{M}(n)$ data da $T(A) = 3A - 2A^T$. Si mostri che T è diagonalizzabile.

Esercizio 15. Siano u e v due vettori di $\mathbb{R}^n$. Si mostri che u e v sono di ugual lunghezza se e solo se esiste $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonale tale che $P(u) = v$.

Esercizio 16. Sia A la matrice di una rotazione nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ attorno ad un asse per l'origine.

Si calcoli in termini della matrice A il coseno dell'angolo di rotazione.

Esercizio 17. Due matrici $n \times n$ a coefficienti reali sono simili come matrici complesse se e solo se sono simili come matrici reali.

Cioè date due matrici A, B $n \times n$ a coefficienti reali, esiste una matrice invertibile C a coefficienti complessi tale che $A = CBC^{-1}$ se e solo se esiste una matrice invertibile a coefficienti reali M tale che $A = MBM^{-1}$.