Nome **Matricola**

ALGEBRA LINEARE

quarto appello 9/6/2022

Esercizio 1. Sia V un sottospazio di dimensione k in $\mathbb{R}^{2k}$ e sia W lo spazio ortogonale a V.

Dimostrare che esiste una simmetria $S : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k}$ tale che $S(V) = W$ e $S(W) = V$. Partendo da opportune basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{B}'$ di W determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2k}$ formata da autovettori di S. In particolare si ricordi che $S^2 = I$ e che c'è un sottospazio fissato da S rispetto a cui si fa la simmetria.

(Facoltativo) Si può fare quache cosa di simile in $\mathbb{R}^n$ se n è dispari?

Esercizio 2. **Esercizio 3.** Sia t un parametro reale e sia

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t-1 & t^2 \\ 1 & 2 & 2t-2 & -t \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

1. Per quali valori di t A_t è invertibile?
2. Per quali valori di t A_t è triangolabile?
3. Per quali valori di t A_t è diagonalizzabile?

Esercizio 3. Sia $V \subset \mathbb{R}[x]$ il sottoinsieme formato dai polinomi $p(x)$ tali che $p(1) = p(2) = 0$.

1. Dimostrare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.
2. Dimostrare che esiste $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ con nucleo V.