

GEOMETRIA 2
Compito del 3 Febbraio 2016

Esercizio 1.

Sia S il luogo di zeri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ del polinomio $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$. Si consideri lo spazio X ottenuto da $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ collassando ad un punto S .

- (1) Si chiede se lo spazio X sia connesso, compatto, di Hausdorff.
- (2) Si calcoli il gruppo fondamentale di X .
- (3) Se al posto di S si collassa una qualunque circonferenza immersa in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il risultato è lo stesso?

Esercizio 2.

Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio monico di grado d con d radici reali distinte a_1, \dots, a_d . Si consideri in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{C}^2 la curva di equazione $y^2 = p(x)$

- (1) Quante componenti connesse ha la curva in \mathbb{R}^2 ?
- (2) Dimostrare che al di fuori dei punti $(a_i, 0) \in \mathbb{C}^2, i = 1, \dots, d$ la curva è un rivestimento doppio di $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_d\}$.

Esercizio 3.

Determinare il tipo proiettivo della quadrica di equazione $x_0^2 + x_3^2 - x_1x_2 = 0$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ e in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 4.

Si consideri la corona circolare $C = \{1/2 < |z| < 4\} \subset \mathbb{C}$. Si dimostri il il polinomio $z^3 + 2z^2 + 4z + 1$ ha tutte le radici in C . Quante di esse sono reali?