1 Coordinate proiettive omogenee

Abbiamo introdotto lo spazio proiettivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ come il quoziente $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\mathfrak{R}$ dove $\mathfrak{R}$ è la relazione di equivalenza di parallelismo

$$v\mathfrak{R}w \iff \exists\lambda \neq 0 \text{ tale che } v = \lambda w$$

Abbiamo evidenziato alcune proprietà topologiche come connessione, compattezza, separazione ...

Vogliamo ora vedere alcune proprietà dello spazio proiettivo da un altro punto di vista.

Innazitutto osserviamo che possiamo ripetere l'operazione fatta su $\mathbb{R}^{n+1}$ partendo da un qualunque spazio vettoriale V di dimensione finita. Definiamo

$$\mathbb{P}(V) = V - \{0\}/\mathfrak{R}$$

ove $\mathfrak{R}$ è definita allo stesso modo.

Vogliamo coordinatizzare $\mathbb{P}(V)$ in modo intrinseco: vogliamo cioè, in analogia a quello che si fa con uno spazio vettoriale V quando lo si identifica con $\mathbb{R}^{n+1}$ ogni volta che si fissa una base, dare una procedura per *identificare* $\mathbb{P}(V)$ con $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, mettere quello che si dice un *sistema di coordinate proiettive omogenee* in $\mathbb{P}(V)$.

Indicheremo $V - \{0\}$ per brevità con V' e chiameremo

$$\nu' : V' \to \mathbb{P}(V)$$

la proiezione canonica.

Con queste notazioni chiameremo *sottospazi lineari di dimensione* h di $\mathbb{P}(V)$ le immagini dei sottospazi vettoriali di V di dimensione $h+1$ tramite la ν': in particolare chiameremo *punti* le immagini di quelli di dimensione 1 e potremo pensare il vuoto come sottospazio di dimensione -1.

Se $\{V_i\}$ è una famiglia di sottospazi di V, l'insieme $\cap V_i$ è ancora un sottospazio per cui risultano ben poste le definisioni di sottospazio lineare generato, sottospazio intersezione e sottospazio unione di sottospazi lineari.

Inoltre le nozioni di dipendenza ed indipendenza lineare e di sistema di generatori passano al quoziente nel senso del seguente lemma di immediata dimostrazione.

Lemma 1.1. *Siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ e $\{w_1, \dots, w_k\}$ due k-ple di vettori paralleli, cioè tali che*

$$v_i = \lambda_i w_i \text{ con } \lambda_i \neq 0$$

e siano inoltre v e w sono due altri vettori paralleli. Allora

- *$\{v_1, \dots, v_k\}$ sono indipendenti se e solo se lo sono $\{w_1, \dots, w_k\}$.*

- $v \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) \iff w \in \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_k)$.

Non avendo lo spazio proiettivo così introdotto una struttura additiva, conviene definire la nozione di dipendenza in questo modo.

Definizione 1.2. Diremo che il punto P è *dipendente* dai punti $P_1, \ldots, P_k$ se $P \in \mathrm{Span}(P_1, \ldots, P_k)$ con ovvio significato del termine $\mathrm{Span}(P_1, \ldots, P_k)$[1]

Diremo quindi che k punti sono *indipendenti* se nessuno appartiene allo spazio generato dagli altri

Ossrvazione 1.3. È immediato verificare che con questa definizione due punti sono dipendenti se e solo se coincidono.

È pertanto ben posta la seguente definizione di base

Definizione 1.4. Diremo che i punti $P_1, \ldots, P_k$ sono una *base* di $\mathbb{P}(V)$ se $P_i = [v_i]$ e $\{v_1, \ldots, v_k\}$ formano una base di V

Per uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ la nozione di base equivale ad un isomorfismo con lo spazio numerico R^{n+1}. Vale la stessa cosa per lo spazio $\mathbb{P}(V)$? Nel senso che la scelta di una base di punti induce una identificazione con lo spazio $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$?

La risposta è no. Spieghiamo la ragione.

Fissiamo $n+1$ punti $P_0, \ldots, P_n$ in $\mathbb{P}(V)$ indipendenti e scegliamo un rappresentante per ogni classe di equivalenza

$$P_i = [v_i]$$

Sia ora P un punto qualsiasi di $\mathbb{P}(V)$ e $P = [v]$. Poiché i $\{v_i\}$ sono una base di V si ha per v

$$v = x_0 v_0 + \ldots + x_n v_n$$

Se $\{w_i\}$ e w sono altri rappresentanti per i P_i e per P, risulta

$$w = y_0 w_0 + \ldots + y_n w_n$$

e se $w = kv$ e $W_i = k_i v_i$ risulta $y_i = k_i k^{-1} x_i$.

Pertanto l'applicazione $P \to (x_0, \ldots, x_n)$ non è ben definita poiché in generale la (n+1)-pla $(x_0, \ldots, x_n)$ non è proporzionale a $(y_0, \ldots, y_n)$ e quindi l'associazione dipende dai rappresentatnti scelti..

Per ovviare a questo inconveniente scegliamo un ulteriore punto U in modo tale che la (n+2)-pla $P_0, \ldots, P_n, U$ sia composta di punti a $n + 1$ a $n + 1$ indipendenti.

Sia $U = [u]$. Risulta $u = \sum \alpha_i v_i$ con gli $\alpha_i \neq 0$ per ogni i. Possiamo quindi scegliere come rappresentanti di P_i i vettori $\overline{v_i} = \alpha_i V_i$: con questa scelta si ha $u = \sum \overline{v_i}$ cioè il punto U ha tutte le coordinate ugulai a 1.

[1]Indichiamo con $\mathrm{Span}(P_1, \ldots, P_k)$ il sottospazio lineare che si ottiene come proiezione $\nu'(\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) - \{0\})$ se $P_i = [v_i]$

Se prendiamo altri rappresentanti per i P_i e U, diciamo $\widetilde{v}_i$ e $\widetilde{u}$ con la stessa convenzione, cioè che $\widetilde{u}$ abbia coordinate tutte 1 nella base $\widetilde{v}_i$, cioè

$$\widetilde{v}_i = \lambda_i v_i,\ \widetilde{u} = \lambda u,\ \widetilde{u} = \sum \widetilde{v}_i,$$

si ha:

$$\widetilde{u} = \sum \widetilde{v}_i = \sum \lambda_i v_i$$
$$\widetilde{u} = \lambda u = \sum \lambda v_i.$$

Da cui, per l'indipendenza dei v_i, si ha $\lambda_i = \lambda\ \forall\ i$.

Abbiamo due $(n+1)$-ple di vettori $\widetilde{v}_i$ e v_i con $\widetilde{v}_i = \lambda V_i$ e quindi le due $n+1$-ple di coordinate associate allo stesso punto risultano proporzionali. Pertanto la mappa

$$\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$$

è ben definita.

Definizione 1.5. Una scelta di punti siffatta si dirà un *sitema di riferimento proiettivo*; in particolare il punto U si dirà il *punto unità*

Concludiamo il paragrafo notando che è immediato verificare, passando dallo spazio vettoraiale sopragiacente, la validità nello spazio proiettivo della formula di Grassmann.

Teorema 1.6. *Se U e V sono sottospazi lineari di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ allora vale*

$$\dim\, U + \dim\, V = \dim\, (U \cap V) + \dim\, (U \cup V)$$

2 Cambiamenti di base

Negli spazi vettoriali l'identificazione di V con l'$\mathbb{R}^n$ canonico porta a trattare le applicazioni lineari per mezzo di matrici.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A_f"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Se prendo $W = V$ e $f = id$ la matrice A_f può essere interpretata come la matrice di un cambiamento di base. In questo caso la matrice è invertibile.

Consideriamo quindi il caso di un endomorfismo invertibile dello spazio vettoriale V: il caso in cui la matrice non è invertibile risulta di trasposizione un pochino più laboriosa e ne parleremo più avanti.

Sia quindi A una matrice $(n+1) \times (n+1)$ con $\det A \neq 0$: l'applicazione lineare indotta da A passa al quoziente perché la controimmagine di 0 è il solo zero e la relazione di parallelismo commuta con la linearità.

Anche qui ci poniamo il problema se esistono due matrici che inducono lo stesso cambiamento di base nel quoziente: ad esempio se $A = \lambda B$ è immediato verificare che la cosa è così perché il vettore Bv è parallelo al vettore Av.

Teorema 2.1. *Due matrici A e B inducono lo stesso cambiamento di riferimento proiettivo se e solo se $A = \lambda B$*

Prova: La prova usa lo stesso ordine di ideee di quanto fatto fino ad ora. Se A e B sono due matrici tali che $A = \lambda B$ è ovvia che inducono lo stesso riferimento proiettivo.. Viceversa, sia $P_0, \ldots, P_n, U$ un riferimento proiettivo e siano $Q_i = A(P_i) = B(P_i), U' == A(U) = B(U)$. Se $P_i = [v_i]$ risulta

$$Av_i = \lambda_i (Bv_i) i = 0, \ldots, n$$

Quindi $\lambda_i v_i$ è una base di autovettori per $B^{-1}A$ che pertanto in questa base è diagonale. Usando il fatto che viene conservato il punto U si ottiene che tutti gli elementi sulla diagonale debbono essere uguali e quindi che $B^{-1}A = \lambda I$. □

Da ultimo, passando attraverso lo spazio vettoriale sopragiacente , si ha

Teorema 2.2. *Date due $(n+2)$-ple di punti di $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ a $n+1$ a $n+1$ indipendenti, esiste una ed un sola classe di matrici invertibili che portano l'una nell'altra.*

3 Spazi subordinati

I sottospazi di $\mathbb{P}(V)$ sono stati definiti come le immagini dei sottospazi vettoriali per l'applicazione sul quoziente; in particolare abbiamo chiamato punti le immagini dei sottospazi di dimensione 1 e chiameremo *iperpiani* le immagini di quelli di codimensione 1.

Volendo porre un punto di vista intrinseco potremmo fissare un riferimento proiettivo $P_0, \ldots, P_n, U$:si noti che un iperpiano coordinato (cioè un sottospazio generato da n dei punti P_j si rappresenta in questa situazione con una equazione $x_i = 0$ ed analogamente un sottospazio coordinato di dimensione k, generato cioè da $k+1$ dei punti P_j si rappresenta con equazioni $x_{i_1} = \ldots = x_{i_{n-k}} = 0$. Più precisamente l'iperpiano $x_i = 0$ è quello che non contiene il punto P_i di coordinate $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ ove l'1 è all'i-esimo posto.

Sia ora $a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0$ una equazione lineare omogenea

Teorema 3.1. *Un iperpiano è l'insieme di tutti e soli i punti che verificano una equazione omogenea del tipo $a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0$. Due tali equazioni individuano lo stesso iperpiano se e solo se i coefficienti differiscono per un fattore moltiplicativo.*

Prova: Invece che ricavarlo direttamente dallo spazio vettoriale sopragiacente, vediamo la cosa in modo intrinseco.. Poiché almeno uno dei coefficienti, diciamo a_0, è diverso da zero, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

induce un cambiamento di base in cui $a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0$ diviene l'iperpiano coordinato $x_0 = 0$. Mostriamo infine che se $\sum a_ix_i = 0$ e $\sum b_ix_i = 0$ rappresentano lo stesso iperpiano allora $a_i = \lambda b_i$ per $i = 0, \ldots, n$

Supponiamo che $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Allora

$$x_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_0} x_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{b_0} x_i$$

Usando il fatto che l'eguaglianza vale per ogni punto e quindi anche per i punti di coordinate $(0. \ldots, 1, \ldots, 0)$ si ottiene che $\dfrac{a_i}{a_0} = \dfrac{b_i}{b_0}$ cioè $a_i = \lambda b_i$ con $\lambda = \dfrac{a_0}{b_0}$. $\square$

Tutto ciò si estende in modo ovvio ad un sottospazio qualsiasi e quindi si ha che un sistema lineare omogeneo di r equazioni rappresenta un sottospazio lineare di dimensione maggiore o uguale a $n - r$.

4 Dualità negli spazi proiettivi

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che ad un iperpiano viene associata una $(n+1)$-pla a meno di un fattore di proporzionalità, cioè lo spazio degli iperpiani di uno spazio proiettivo (o di uno spazio vettoriale) viene parametrizzato in modo naturale da uno spazio proiettivo. È immediato vedere che questo spazio non è altro che il proiettivizzato dello spazio duale $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$.

In altri termini lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ rappresenta (parametrizza) sia le rette (per l'origine) dello spazio vettoriale V, sia (per dualità) gli iperpiani (sempre per l'origine) di V.

Se in uno spazio proiettivo chiamiamo *stella di iperpiani* di dimensione h un sottospazio lineare dello spazio proiettivo duale, l'usuale dualità in uno spazio vettoriale V [2] induce il seguente risultato

[2] Ricordiamo che dato un sottospazio W di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n, se indichiamo con $A(W)$ il sottospazio dello spazio duale V^* formato da tutti i funzionali lineari nulli

Teorema 4.1. • *Una stella di iperpiani Σ_h di dimensione h è l'insieme di tutti e soli gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ passanti per un sottospazio lineare S_{n-h-1}, che si dirà* centro *della stella.*

- *Gli iperpiani passanti per un sottospazio lineare S_h formano una stella di iperpiani di dimensione $n-h-1$ di cui S_h è il centro.*

In particolare le rette di $\mathbb{P}(V)^*$, cioè i sottospazi Σ_1 di dimensione 1 di $\mathbb{P}(V)^*$ si chiamano *fasci*.

Osserviamo inoltre che se $\Sigma(S')$ e $\Sigma(S")$ sono due stelle di iperpiani di centri rispettivamente S' e $S"$ risulta

$$\Sigma(S') \subset \Sigma(S") \iff S" \subset S'$$

da cui

$$\Sigma(S' \cap S") = \Sigma(S') \cup \Sigma(S"), \text{ e } \Sigma(S' \cup S") = \Sigma(S') \cap \Sigma(S").$$

Tutto ciò si può riassumere nel seguente *principio di dualità* negli spazi proiettivi

Teorema 4.2. *Sia T un enunciato comprendente i termini* sottospazio, inclusione, inetrsezione, unione *o equazioni. Allora se T è valido per un qualunque spazio proiettivo di dimensione n è valido l'enunciato T^* (detto l'enunciato* duale*) ottenuto da T scambiando i sottospazi di dimensione h con i sottospazi di dimensine duale $n-1-h$, rovesciando le inclusioni e scambiando le intersezioni con le unioni.*

Prova: Sia $T(S_h, S_k, \ldots, \subset, \cap.\cup)$ un enuciato come in ipotesi, valido per gli spazi proiettivi di dimensione n. Quindi nello spazio duale vale il teorema $T(\Sigma_h, \Sigma_k, \ldots, \subset, \cap.\cup)$. Utilizzando le relazioni appena viste e il teorema della stella di iperpiani, passando da ogni stella alla sua base si ottiene per $P(V)$ l'enunciato T^* □

Ad esempio in uno spazio proiettivo di dimensione 2 per due punti passa una ed una sola retta e (duale) due rette si incontrano sempre in un punto, in uno spazio di dimensione 3 lo stesso enunciato si dualizza in due piani si incontrano in una retta (i "duali" dei punti in P_3 sono i piani e le rette sono autoduali. Si noti che dai discorsi fatti risulta che in un piano proiettivo due rette si incontrano sempre in un punto e in uno spazio proiettivo di dimensione 3 una retta e un piano hanno sempre un punto in comune.

5 Relazione tra coordinate affini e coordiante omogenee.

Abbiamo visto che in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ viene naturale individuare $n+1$ aperti omeomorfi a $\mathbb{R}^n$, precisamente i sottoinsiemi U_i in cui la i-esima coordinata

su W risulta $\dim A(W) = n - \dim W$; definendo analogamente per un sottospazio U di V^* lo spazio $A(U)$ come il sottospazio di V formato dai vettori che annullano tutti i funzionali di U, risulta $A(A(W)) = W$

è diversa da zero e l'applicazione è data da, nel caso ad esempio di U_0,

$$\{(x_0,\ldots,x_n) : x_0 \neq 0\} \to (\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0})$$

Se viceversa partiamo da un $\mathbb{R}^n$ considerando le coordinate $(y_1,\ldots,y_n)$ come rapporto di due coordinate omogenee $(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0})$ si ottiene una identificazione dell'$\mathbb{R}^n$ come un aperto di un proiettivo dove i punti che mancano sono quelli con $x_0 = 0$.

Nel seguito saremo portati a considerare in $\mathbb{R}^n$ i luoghi di zero di funzioni polinomiali: che cosa succede se facciamo questa operazione?

Partiamo da un polinomio $p(y_1,\ldots,y_n)$ di grado d, consideriamo in $\mathbb{R}^n$ il chiuso $p(y_1,\ldots,y_n) = 0$, introduciamo delle coordinate omogenee e consideriamo il polinomio $P(x_0,\ldots,x_n) = x_0^d p(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0})$. P **non** è una funzione su $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, tuttavia risulta ben definito in $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ il suo luogo di zeri (perché?) che è un chiuso (perché?), e quindi un compatto.

$P = 0$ contiene in $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ dei punti in piú di $p = 0$ in $\mathbb{R}^n$: i punti in cui interseca l'iperpiano $x_0 = 0$. Vediamo qualche esmpio.

Esempi 5.1.

1. *Provare che due rette in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si incontarno sempre sia come conseguenza della formula di Grassmann che analiticamente in termini di equazioni.*
2. *Pensando $\mathbb{R}^2$ dotato di un sistema di coordinate proiettive omogenee*[3] *, scrivere le equazioni di tutte le rette passanti per il punto $(0,0,1)$,oppure passanti per il punto $(0,1,1)$ o passanti per il punto $(1,0,0)$*
3. *Provare, sia come conseguenza della formula di Grassmann che analiticamente in termini di equazioni,che una retta ed un piano in $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ si incontrao sempre*
4. *Pensando $\mathbb{R}^3$ dotato di un sistema di coordinate proiettive omogenee, scrivere le equazioni di tutti i piani passanti per il punto $(1,0,0,0)$ e il punto $(0,0,0,1)$*
5. *Pensando $\mathbb{R}^3$ dotato di un sistema di coordinate proiettive omogenee, scrivere le equazioni di tutte le rette passanti per il punto $(1,0,0,0)$,oppure passanti per il punto $(0,0,0,1)$*

Gli esempi precedenti giustificano un poco il nome di di *punti all'infinito* che viene dato ai punti con la coordinata x_0 uguale a 0 in $\mathbb{R}^n$ quando lo si pensa dotato di un sistema di coordinate proiettive omogenee

Esempi 5.2. *Calcolare i punti all'infinito delle seguenti curve di $\mathbb{R}^2$*

1. $x^2 - y^2 = 0$
2. $x^2 - y^2 = 1$

[3] Cioè pensandolo come l'aperto $x_0 \neq 0$ del suo completato proiettivo

3. $xy = 0$

4. $xy = 1$

1.12.2009