Richiami su Analisi Matematica.

Differenziabbilitá. Integrazione.

Vladimir Georgiev

Dipartimento di Matematica "L.Tonelli",
Università di Pisa,
Largo Bruno Pontecorvo 5, I-56127, Pisa, Italy.
E-mail: georgiev@dm.unipi.it

Contents

Chapter 1

Limiti e loro proprietá, esercizi.

1.1 Definizione e proprietá di base

Un numero reale a é il limite di una successione di numeri reali a_n se per ogni intorno di a esiste un numero naturale N tale che a_n rimane in questo intorno quando $n > N$.

La definizione piú precisa:

Definizione 1.1.0.1. *a é il limite della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero naturale N tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > N$. In questo caso si scrive:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$

e si dice che la successione converge ad a .

Se $a = 0$, la successione é detta infinitesima.

La definizione di limite puo' essere estesa al caso $a = +\infty$ e $a = -\infty$ nel modo seguente. La successione a_n ha limite $+\infty$ se se per ogni $M > 0$ esiste un numero naturale N tale che $a_n > M$ per ogni $n > N$.

Lemma 1.1.0.1. *Se la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge allora il limite é unico.*

Dimostrazione. Se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a,$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = b$$

e $a < b$, allora possiamo sceglliere

$$\varepsilon < \frac{b-a}{2}.$$

La definizione del limite ci dice che esiste N_0 tale che

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \quad |a_n - b| \leq \varepsilon.$$

Utilizzando la disequazione triangolare troviamo

$$|a-b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| \leq 2\varepsilon < b - a = |b-a|$$

e quindi

$$|a-b| < |a-b|$$

porta ad assurdo. □

Altre proprietá semplici di limit sono presentati in seguito.

Lemma 1.1.0.2. *(Permanenza del segno) Se una successione a_n converge ad un limite strettamente positivo $a > 0$ (che puo' essere anche $+\infty$), allora esiste un N tale che $a_n > 0$ per ogni $n > N$.*

Lemma 1.1.0.3. *Se una successione a_n converge ad un limite (finito o infinito) a , la successione dei valori assoluti $|a_n|$ converge al valore assoluto del limite $|a|$.*

Lemma 1.1.0.4. *(Successioni monotone) Una successione monotona a_n converge sempre ad un limite (che puo' essere infinito). Il limite e' dato dall'estremo superiore (se e' monotona crescente) o inferiore (se e' decrescente) dei valori della successione. In altre parole, nel caso crescente:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n \{a_n\}.$$

Tale limite e' finito quindi se e solo se la successione e' limitata.

Il fatto che a_n sia monotona e converga ad un limite a é spesso espresso con una freccia

$$a_n \uparrow a \quad \text{oppure} \quad a_n \downarrow a.$$

Lemma 1.1.0.5. *(Somma e prodotto di successioni) Se a_n e b_n sono successioni convergenti, con*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \lim_{n\to+\infty} b_n = b$$

limiti finiti, allora:

$$\lim_{n\to+\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad \textit{se } b_n \neq 0\ \forall n,\ b \neq 0.$$

Queste proprieta' sono valide in alcuni casi anche per limiti a, b infiniti, purche' l'operazione richiesta non sia una forma indeterminata. Ad esempio,

$$a + \infty = +\infty, \quad a - \infty = -\infty,$$

$$+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty.$$

e se $a > 0$, anche

$$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0.$$

Lemma 1.1.0.6. *(Principio del confronto)*

Una successione "stretta fra due successioni" convergenti allo stesso limite converge anch'essa a questo limite. Formalmente, se a_n, b_n e c_n sono tre successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

per ogni n , e se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$$

allora anche

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell.$$

Corollary 1.1.0.1. *Se* a_n *e limitata e* $b_n \to 0$ *allora* $a_n b_n \to 0$.

Lemma 1.1.0.7. *(Limiti per funzioni monotone) Se* $f(x)$ *é una funzione monotona e sono soddisfatti gli ipotesi:*

$$x_k \to x, \ x_k \neq x,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x+1/n) = L = \lim_{n\to\infty} f(x+1/n),$$

allora

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = L.$$

1.1.1 Teorema di Bolzano - Weierstrass

Una sottosuccessione di una successione a_n é ottenuta prendendo una funzione

$$k \to n_k \in \mathbb{N}$$

strettamente crescente, cioé

$$k_1 < k_1 \implies n_{k_1} < n_{k_2}$$

e definendo la funzione copposta

$$k \ \to \ n_k \ \to \ a_{n_k}.$$

La successione ottenuta

$$k \to a_{n_k}$$

si chiama sottosuccessione.

Osservazione 1.1.1.1. *La proprietá*

$$k \to n_k \in \mathbb{N}$$

e la condizione

$$k_1 < k_1 \implies n_{k_1} < n_{k_2}$$

implica

$$n_k \geq k. \tag{1.1.1.1}$$

Osservazione 1.1.1.2. *Se*

$$k \in \mathbb{N} \to n_k \in \mathbb{N}$$

e una funzione crescente e

$$m \in \mathbb{N} \to k_m \in \mathbb{N}$$

e altra funzione crescente, allora la composizione

$$m \to n_{k_m}$$

é una funzione crescente, cosi' la sottosuccessione

$$\{a_{n_{k_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$$

di una sottosuccessione

$$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e sottosuccesione di* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemma 1.1.1.1. *(Bolzano - Weierstrass) Ogni successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *limitata in* $\mathbb{R}$ *ha una sottosuccessione che converge.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata, tale che

$$|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo l'insieme

$$A_m = \{a_n; n \geq m\}.$$

Ovviamente

$$m_1 \leq m_2 \implies A_{m_1} \supset A_{m_2}$$

Sia U_m estremo superiore e sia L_m estremo inferiore di A_m. Si puo verificare che

$$L_m \text{ cresce,}$$

mentre

$$U_m \text{ decresce,}$$

abbiamo inoltre
$$L_0 \leq L_m \leq U_m \leq U_0$$
e quindi Lemma 1.1.0.4 della convergenza della successione monotona implica
$$U_m \searrow U.$$
Il punto U soddisfa la proprietá: per ogni numero naturale $k \geq 1$ possiamo trovare n_k tale che
$$a_{n_k} \in A_k, \quad U_k - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq U_k.$$
Questa proprietá implica
$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = U.$$
□

Lemma 1.1.1.2. *Una successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e tende ad* a *se e solo se ogni sua sottosuccessione che converge ha come limite solo* a.

Dimostrazione (solo per caso di successioni limitate). Se
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_0 \in \mathbb{N}$, tale che
$$n \geq N_0 \implies |a_n - a| \leq \varepsilon,$$
cosií la condizione (1.1.1.1) implica
$$k \geq N_0 \implies |a_{n_k} - a| \leq \varepsilon,$$
e quindi
$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é una successione tale che ogni sua sottosuccessione che converge e ha come limite solo a, allora per assurdo possiamo supporre

che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad a e quindi esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si puo trovare $n_k \geq k$ tale che a_{n_k} soddisfa

$$|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0. \tag{1.1.1.2}$$

Il teorema di Bolzano - Weierstrass (vedi Lemma 1.1.1.1) implica che possiamo trovare una sottosuccessione di

$$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

tale la sottosuccessione converge a b. La disequazione (1.1.1.2) implica

$$|b - a| \geq \varepsilon_0$$

e questa conclusione porta ad assurdo, perche la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é una successione tale che ogni sua sottosuccessione che converge e ha come limite solo a.

L'assurdo mostra che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

□

1.1.2 Convergenza della successione implica convergenza in media

Lemma 1.1.2.1. *Se* $a_n \to a$, *allora*

$$m_n = \frac{\sum_{k=1}^n a_n}{n} \to a.$$

Dimostrazione. Per ohni $\varepsilon > 0$ troviamo N tale che

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \tag{1.1.2.3}$$

Trovato N possiamo trovare $C = C(N)$ tale che

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k| \leq C(N). \tag{1.1.2.4}$$

Cosí per ogni $n \geq N$ usiamo (1.1.2.3) e troviamo

$$|m_n - a| = \left| \frac{\sum_{k=1}^n a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^n (a_n - a)}{n} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sum_{k=1}^N (a_n - a)}{n} + \frac{\sum_{k=N+1}^n (a_n - a)}{n} \right| \leq$$

$$\frac{\sum_{k=1}^N |a_k| + |a|}{n} + \left| \frac{\sum_{k=N+1}^n (n-N)\varepsilon}{n} \right|.$$

Adesso usando (1.1.2.4) otteniamo

$$|m_n - a| \leq \frac{C(N) + N|a|}{n} + \varepsilon.$$

Adesso possiamo scegliere $N_1 > N$ tale che

$$\frac{C(N) + N|a|}{n} < \varepsilon, \ \forall n \geq N_1$$

e quindi

$$|m_n - a| \leq 2\varepsilon, \quad \forall n \geq N_1.$$

□

Possiamo trovare esempio di una successione a_n tale che

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_n}{n} \to a$$

ma a_n non converge ad a. Per la preparazione del esempio possiamo usare induzione e verificare le seguente identitá

Problema 1.1.2.1. *Se* $a \in (0, \pi/2)$ *allora*

$$1+2\cos a+2\cos(2a)+\cdots 2\cos(na) = \frac{\cos(na) - \cos((n+1)a)}{1-\cos a} = \frac{\sin((n+1/2)a)}{\sin(a/2)}.$$

1.1.3 Completezza di $\mathbb{R}$

Definizione 1.1.3.1. *Una successione di Cauchy e‘ una successione a_n , tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che:*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

per ogni $n, m > N$.

Teorema 1.1.1. *(Criterio di convergenza di Cauchy) Una successione di numeri reali é convergente se e solo se é di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Sia

$$S = \cup_k \cap_{j\geq k} (-\infty, a_j]$$

cioé l'insieme dei numeri reali che sono maggiori di s_j solo per un numero finito di valori di j. Questo insieme e quindi limitato superiormente e quindi ha un estremo superiore a per l'assioma di Dedekind. Mostriamo che effettivamente la successione a_n tende a.

Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un N tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

per ogni n, m maggiore o uguale a N. Allora la successione assume infinite volte valori all'interno dell'intervallo

$$(a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon)$$

e un numero finito di volte nel suo complementare. Quindi $a_N - \varepsilon$ é un elemento di S e $a_N + \varepsilon$ e maggiore di ogni elemento di S, e quindi e maggiore o uguale ad a.

Quindi a e contenuto nell'intervallo

$$(a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon),$$

e per la disuguaglianza triangolare risulta che

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_N| + |a - a_N| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Quindi

$$a_n \to a$$

e la successione converge. $\square$

1.2 Limiti Notevoli

1.2.1 Primi limiti notevoli

Lemma 1.2.1.1. *Abbiamo le proprietá:*

- *Se* $m \in \mathbb{N}$ *e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é successione di numeri reali che tende a* x *allora*
$$\lim_{n\to\infty} x_n^m = x^m;$$
- *Se* $m \in \mathbb{Z}$ *e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é successione di numeri reali che tende a* $x \neq 0$, *allora*
$$\lim_{n\to\infty} x_n^m = x^m.$$
- *Se* $q \in \mathbb{Q}$ *e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é successione di numeri reali e positivi che tende a* $x > 0$ *allora*
$$\lim_{n\to\infty} x_n^q = x^q. \tag{1.2.1.5}$$
- *Se* $b \in \mathbb{R}$ *e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é successione di numeri reali e positivi che tende a* $x > 0$ *allora*
$$\lim_{n\to\infty} x_n^b = x^b. \tag{1.2.1.6}$$

Lemma 1.2.1.2. *Abbiamo la proprietá:*

Per ogni $a > 0$ *ed ogni successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di numeri reali che tende a* 0 *abbiamo*
$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1. \tag{1.2.1.7}$$

Dimostrazione. Per semplictá studiamo solo il caso $x_n = 1/n$ e $a > 1$. Usando l'identitá
$$0 < a^{1/n} - 1 = \frac{q^n - 1}{1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}}, \quad q = a^{1/n} > 1, \tag{1.2.1.8}$$
troviamo la stima
$$0 < a^{1/n} - 1 = \frac{a-1}{\underbrace{1+1+\cdots 1}_{n \text{ volte}}} = \frac{a-1}{n} \to 0.$$
Principio di confronto completa la dimostrazione. □

Lemma 1.2.1.3. *Se $q > 1$ allora*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty. \tag{1.2.1.9}$$

Dimostrazione. La disequazione di Bernoulli

$$q^n = (1 + q - 1)^n \geq 1 + n(q - 1) \tag{1.2.1.10}$$

ed il Teorema del confronto implicano (1.2.1.9). □

Corollary 1.2.1.1.

$$q^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \text{non ha limite} & \text{se } q \leq -1. \end{cases} \tag{1.2.1.11}$$

Lemma 1.2.1.4. *Abbiamo le proprietá:*

- *Se $m \in \mathbb{N}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é successione di numeri reali diversi da 0 che tende a 0 allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + x_n)^m - 1}{x_n} = m;$$

- *Se $m \in \mathbb{Z}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é successione di numeri reali diversi da 0 che tende a 0 allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + x_n)^m - 1}{x_n} = m;$$

- *Se $q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é successione di numeri reali diversi da 0 che tende a 0 allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + x_n)^q - 1}{x_n} = q;$$

- *Se $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é successione di numeri reali diversi da 0 che tende a 0 allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + x_n)^a - 1}{x_n} = a.$$

Idea della dimostrazione. Consideriamo il caso

$$x_n = \frac{1}{n}, \ q = \frac{1}{m}.$$

Di nuovo usiamo la relazione (1.2.1.8), modificata come segue

$$0 < (1+x_n)^{1/m} - 1 = \frac{q_n^m - 1}{1 + q_n + q_n^2 + \cdots + q_n^{m-1}}, \quad q_n = (1+x_n)^{1/m} > 1, \tag{1.2.1.12}$$

cosi si trova

$$\frac{(1+x_n)^{1/m} - 1}{x_n} = \frac{1}{1 + q_n + q_n^2 + \cdots + q_n^{m-1}} \to \frac{1}{m}$$

perche $q_n \to 1$ quando $n \to \infty$. $\square$

1.2.2 Funzione trigonometriche e loro limiti notevoli

Richiami sulle funzioni trigonometriche e relazioni di base

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Per $0 < \alpha < \pi$

$$\sin\alpha < \alpha$$

e

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \cos\alpha.$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}, \ \sin\alpha\sin\beta = \frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \ \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Limiti notevoli per le funzioni trigonometriche

Lemma 1.2.2.1. *Abbiamo la proprietá:*

- *Per ogni $a \in \mathbb{R}$ ed ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali che tende a 0 abbiamo*
$$\lim_{n\to\infty} \sin(a+x_n) = \sin a;$$
- *Per ogni $a \in \mathbb{R}$ ed ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali che tende a 0 abbiamo*
$$\lim_{n\to\infty} \cos(a+x_n) = \cos a;$$
- *Per ogni $a \in \mathbb{R}$, tale che $\cos x \neq 0$ ed ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali che tende a 0 abbiamo*
$$\lim_{n\to\infty} \tan(a+x_n) = \tan a.$$

Per ogni $x \in (0, \pi/2)$ abbiamo

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{1.2.2.13}$$

Lemma 1.2.2.2. *Abbiamo la proprietá:*

- *Per ogni ed ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, diversi da 0, che tende a 0 abbiamo*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1;$$
- *Per ogni ed ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, diversi da 0, che tende a 0 abbiamo*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}.$$

1.2.3 Numero di Nepero

Lemma 1.2.3.1. *(Il numero di Nepero) Le successioni*

$$\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ \beta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

convergono ed hanno lo steso limite (il numero di Nepero e).

Dimostrazione. La successione α_n é crescente. Infatti, la disequazione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

si puo rescrivere nella forma

$$\frac{n^{n+1}(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}} > \frac{n}{n+1}.$$

L'ultima disequazione diventa

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)} > 1-\frac{1}{n+1}$$

e questa disequazione si puo dimostrare usando la disequazioni di Bernulli

$$(1+\theta)^{n+1} \geq 1+(n+1)\theta,$$

dove $\theta > -1$.

In modo analogo si vede che β_n decresce. Infatti

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

si puo rescrivere nella forma

$$\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}(n+2)^{n+1}} > \frac{n+2}{n+1}$$

e quindi possiamo usare di nuovo Bernulli e la stima

$$\frac{n+1}{n(n+2)} \geq \frac{1}{n+1}.$$

□

Problema 1.2.3.1. *Se a_n e successione di numeri reali tale che*

$$a_n \longrightarrow +\infty$$

allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Suggerimento

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$

Problema 1.2.3.2. *Se k é numero intero la successione*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn},$$

tende ad e^k.

Problema 1.2.3.3. *Se a é numero reale la successione*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{an},$$

tende ad e^a.

1.3 Esercizi

Problema 1.3.0.1. *Se $a_n \geq 0$, $a_n \longrightarrow a > 0$ é $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$é una successione infinitesima allora*

$$a_n^{r_n} \longrightarrow 1. \tag{1.3.0.14}$$

Suggerimento. Se $a_n \to a$ allora la successione é limitata e

$$\frac{a}{2} \leq a_n \leq 2a$$

per n grande. Cos'i troviamo

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{r_n} \leq a_n^{r_n} \leq (2a)^{r_n}.$$

Usando il limite notevole (1.2.1.7), cioé

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^{r_n} = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty}(2a)^{r_n} = 1$$

ed applicando il principio di confronto concludiamo che(1.3.0.14) é vera. $\square$

Problema 1.3.0.2. *Se $a_n \geq 0$, $a_n \longrightarrow a > 0$ é $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$é una successione che converge a $x \in \mathbb{R}$, allora*

$$a_n^{x_n} \longrightarrow a^x. \tag{1.3.0.15}$$

Suggerimento. Abbiamo l'identitá

$$a_n^{x_n} - a^x = a_n^{x_n} - a_n^x + a_n^x - a^x. \tag{1.3.0.16}$$

Per il termine

$$a_n^{x_n} - a_n^x = a_n^x\left(a_n^{x_n-x} - 1\right) \tag{1.3.0.17}$$

usiamo il fatto che $x_n - x$ é una successione infinitesima e quindi (1.3.0.14) implica

$$\left(a_n^{x_n-x} - 1\right) \to 0.$$

Usando il limite notevole 1.2.1.6 troviamo

$$a_n^x \to a^x$$

e quindi la successione in (1.3.0.17) é infinitesima. Usando di nuovo il fatto che

$$a_n^x \to a^x$$

concludiamo che la successione in (1.3.0.16) é infinitesima. $\square$

Problema 1.3.0.3. *Se $a_n, b_n > 0$,*

$$\lim b_n/a_n = A$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$$

allora

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n} \to \mathrm{e}^A. \tag{1.3.0.18}$$

Idea della soluzione. Prima si dimostra che

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e. \tag{1.3.0.19}$$

In fatti, abbiamo le disequazioni

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \geq \left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]}$$

e le proprietá

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N} = e$$

e

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+1} = e$$

insieme con il principio di confronto implicano (1.3.0.19).

La condizione

$$\lim b_n/a_n = A,$$

e' Problema 1.3.0.2 implicano

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{b_n} = \left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{b_n/a_n} \to e^A.$$

□

1.3.1 Confronto ed esercizi

Lemma 1.3.1.1. *(confronto tra a_n^A e B^{a_n} quando $a_n \to \infty$, $A > 0$ e $B > 1$):*

$$a_n \to \infty \Rightarrow \frac{a_n^A}{B^{a_n}} \to 0 \ \forall A \in \mathbb{R}, \forall B > 1. \tag{1.3.1.20}$$

Idea della Dimostrazione. É sufficiente dimostrare la disequazione

$$B^{a_n} \geq a_n^{A+1} \tag{1.3.1.21}$$

o prendendo la parte intera di a_n dobbiamo verificare che esiste constante $C > 0$ ed N_0 tale che per ogni intero $N \geq N_0$ abbiamo

$$B^N \geq CN^{A+1} \tag{1.3.1.22}$$

L'ultima disequazione (1.3.1.23) ed equivalente a

$$\left(B^{1/(A+1)}\right)^N \geq CN. \tag{1.3.1.23}$$

La condizione $B > 1$ $A > 0$ implicano

$$b = B^{1/(A+1)} > 1$$

e quindi possiamo usare la disequazione (1.2.1.10) e dedurre

$$b^N \geq (b-1)N.$$

Cos'i abbiamo (1.3.1.23) é quindi vale (1.3.1.21). □

Lemma 1.3.1.2. *Sia* $A \geq 0$.

$$a_n > 0 \text{ e } \frac{a_{n+1}}{a_n} \to A \Rightarrow (a_n)^{1/n} \to A. \tag{1.3.1.24}$$

Se

$$a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \to A$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & se\ A < 1, \\ \infty & se\ A > 1, \\ no\ si\ puo\ dire\ nulla & se\ A = 1. \end{cases} \tag{1.3.1.25}$$

Idea della Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per $n \geq n_0$ abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq A - \varepsilon.$$

La relazione
$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \geq (A-\varepsilon)^{n-n_0+1}$$
mostra che possiamo scrivere
$$a_{n+1} \geq a_{n_0}(A-\varepsilon)^{n-n_0+1}.$$
In modo equivalente queste disequazione significa che
$$a_{n+1}^{1/(n+1)} \geq (a_{n_0})^{1/(n+1)}(A-\varepsilon)^{(n-n_0+1)(n+1)}.$$
La successione
$$d_n = (a_{n_0})^{1/(n+1)}(A-\varepsilon)^{(n-n_0+1)(n+1)}$$
tende a $A-\varepsilon$ e quindi il principio della permanenza del segno implica che
$$d_n \geq A-2\varepsilon$$
per n grande. Possiamo scievre adesso
$$a_{n+1}^{1/(n+1)} \geq d_n \geq A-2\varepsilon. \tag{1.3.1.26}$$
Procedendo in modo simile troviamo
$$a_{n+1}^{1/(n+1)} \leq A+2\varepsilon. \tag{1.3.1.27}$$
Le due disequazioni (1.3.1.26) e (1.3.1.27) dimostrano (1.3.1.24).

□

Problema 1.3.1.1. *Calcolare*

a)
$$\lim_{n\to\infty}(n+3\sqrt{n}\sin n)^{1/4} - (n+\sqrt{n}\sin n)^{1/4}.$$

b)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1)}.$$

c)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots n^2}{n^3}$$

d)
$$\lim_{n\to\infty}\cos^{n^6}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Problema 1.3.1.2.

$$a_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}.$$

Problema 1.3.1.3. *Studiare la convergenza della successione*

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Problema 1.3.1.4. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{4^n(n-1)!n!(n+1)!}(2n)!\right)^{1/n}.$$

Problema 1.3.1.5. *Trovare il limite*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+n}-n^{3/2}}{n+6\sin n}.$$

Problema 1.3.1.6. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n)^n}{3^{n-1}(n+3)!n!(n+2)!}(2n-1)!\right)^{1/n}.$$

Problema 1.3.1.7. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)}.$$

Problema 1.3.1.8. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)}.$$

Problema 1.3.1.9. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^{\alpha-1}}$$

al variare del parametro reale α.

Problema 1.3.1.10. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+\sin n)^{1/n}(2+\sin n)^n}{n!}.$$

Problema 1.3.1.11. *Calcolare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e il limite della successione*

$$a_n = n + \frac{1}{3n} - \sqrt{n^2+1}.$$

1.4 Successioni per ricorrenza

Problema 1.4.0.1. *Studiare il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza:*

$$x_1 = \alpha,$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}.$$

al variare di α.

Suggerimento. Si puo vedere che $\alpha > 0$ implica che la successione é sempre positiva e decrescente al suo unico punto fisso 0. Per $\alpha = 0$ la successione é identicamente nulla. Per $\alpha < 0$ si puó facilmente dimostrare che la successione é convergente a 0 tranne che per i valori dell'insieme in cui la successione non é definita.

Problema 1.4.0.2. *Studiare il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza:*

$$x_1 = \alpha,$$

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n - x_n^2}.$$

al variare di $\alpha \in [0, 2]$.

Problema 1.4.0.3. *La successione per ricorrenza é definita come segue*

$$a_{k+1} = (1 + k)^{-2} a_k^3 + a_k, \; a_1 = \varepsilon.$$

Vedere se esiste $\varepsilon > 0$ tale che la successione é convergente.

Soluzione. La successione é crescente e dobbiamo vedere se é limitatta. Sia

$$b_k = \delta(2 + k)^\theta,$$

dove δ é abbastanza piccolo e $\theta > 0$. Scegliamo poi $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, tale che

$$b_1 > a_1 \iff \delta 3^\theta > \varepsilon.$$

Si puo verificare che

$$b_{k+1} > (1+k)^{-2} b_k^3 + b_k. \tag{1.4.0.28}$$

Infatti, (1.4.0.28) é equivalente a

$$\delta(3+k)^\theta > \delta(2+k)^\theta + \frac{\delta^3(2+k)^{3\theta}}{(1+k)^2}$$

e quindi dobbiamo scegliere $\delta > 0$ piccolo e $\theta \in (0,1)$ tale che

$$(3+k)^\theta - (2+k)^\theta > \frac{\delta^2(2+k)^{3\theta}}{(1+k)^2}. \tag{1.4.0.29}$$

Usando le relazioni

$$(3+k)^\theta - (2+k)^\theta \sim k^{\theta-1}, \ \frac{(2+k)^{3\theta}}{(1+k)^2} \sim k^{3\theta-2}$$

per $k \to \infty$,

$$\theta - 1 > 3\theta - 2 \iff \theta < 3/2,$$

possiame scegliere $\delta > 0$ tale che vale (1.4.0.29). Il principio di confronto tra le successioni a_k, b_k implica

$$a_k \leq b_k = \delta(2+k)^\theta. \tag{1.4.0.30}$$

Usando la definizione di a_k e (1.4.0.30), deduciamo

$$a_{k+1} - a_k \leq \frac{\delta^3(2+k)^{3\theta}}{(1+k)^2}.$$

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+k)^{3\theta}}{(2+k)^2}$$

convegre per $3\theta - 2 < -1$ cosi scegliendo $\theta \in (0, 1/3)$ si vede che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} - a_k$$

converge e questo significa che la successione a_k e limitata e quindi converge.

$\square$

Problema 1.4.0.4. *Studiare il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza:*

$$x_1 = \alpha,$$

$$x_{n+1} = 1 + x_n - x_n^2.$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$.

Problema 1.4.0.5. *Sia* $x_0 = 1$ *e* x_n *e definita per ricorrenza*

$$x_{n+1} = x_n + \sin x_n.$$

a)Dimostrare, che $0 < x_n < \pi$.
b) Dimostrare che x_n *cresce.*
c) Calcolare il limite di x_n.

Problema 1.4.0.6. *Studiare il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza:*

$$x_1 = 0,$$

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \cos x_n.$$

Problema 1.4.0.7. *Sia* M *un insieme tale che* $a \in M$ *se e solo se:* $a > 0$ *é un numero reale talle che*

$$\cos(2^n a) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.4.0.31}$$

ed esiste $A \in (-\infty, +\infty)$ *tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \tan(2^n a) = A.$$

Studiare la cardinalitá di M.

Soluzione. Suppogniamo che esiste $A \in (-\infty, \infty)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \tan(2^n a) = A. \tag{1.4.0.32}$$

L'identitá

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{(1 - \tan^2\alpha)}$$

implica
$$(1-\tan^2(2^n a))\tan(2^{n+1}a) = 2\tan(2^n a)$$
e quindi passando al limite troviamo
$$(1-A^2)A = 2A \quad \Longrightarrow A = 0.$$
Sia $a \in M$ e
$$\sin(2^n a) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1.4.0.33)$$
Abbiamo inoltre (1.4.0.31) e
$$\lim_{n\to\infty} \tan(2^n a) = 0. \qquad (1.4.0.34)$$
Ponendo
$$x_n = \tan^2(2^n x) \to 0,$$
abbiamo le relazioni
$$x_{n+1} = \frac{4x_n}{(1-x_n)^2}$$
e usando la proprieta' $0 < x_n$, e $x_n \to 0$ troviamo $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che
$$0 < x_n < 1, \ \forall n \geq N_0.$$
Cosí troviamo
$$x_{N_0} > 0, \quad x_{n+1} > 4x_n$$
e con induzione troviamo
$$x_n \geq 4^{n-N_0} x_{N_0}$$
L'ultima disequazione contradice al fatto che $x_n \to 0$ e mostra che (1.4.0.33) non é vera. Se (1.4.0.33) non é vera, allora esiste n_0 tale che
$$\sin(2^{n_0} a) = 0$$
e quindi
$$a = \frac{k}{2^{n_0}}\pi$$
per qulache $k \in \mathbb{N}$. Usando la relazione (1.4.0.31) si puo vedere che $n_0 = 0$ e quindi
$$a \in M \iff a = k\pi, \ k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$
cosi possiamo concludere che M é numerabile.

$\square$

1.5 Limite superiore e limite inferiore

Problema 1.5.0.1. *(Limite superiore di una successione)*
Sia $\{x_n\}$ una successione di numeri reali limitata, siano:

$$b_k = \sup\{x_k, x_{k+1}, \dots\} \quad k = 1, 2, \dots$$

Verivicare che la successione $\{b_k\}$ cresce ed é limitata.

Sia

$$\beta = \inf\{b_1, b_2, \dots\} = \lim_{k\to\infty} b_k. \tag{1.5.0.35}$$

Allora β é il limite superiore di $\{x_n\}$.

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m\right) = \inf\{\,\sup\{\,x_k : k \geq n\,\} : n \geq 0\,\},$$

Si nota che:

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$$

ed esiste una sottosuccessione $\{x_{n_i}\}$ di x_n tale che:

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \beta$$

e β é il piú grande numero che gode di tale proprietá.

Corollary 1.5.0.1. *(teorema di Bolzano Weierstrass) Per ogni successione $\{x_n\}$ limitata, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_i}\}$ di x_n che converge.*

In modo analogo si definisce il limite inferiore di una successione:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} x_m\right) = \sup\{\,\inf\{\,x_m : m \geq n\,\} : n \geq 0\,\}.$$

Si ha:

$$-\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = \liminf_{n\to\infty} x_n$$

Se la successione $\{x_n\}$ converge si ha:

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n) = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Chapter 2

Limiti delle funzioni

2.1 Limite di una funzione reale di variabile reale - definizione

Sia data una funzione

$$f : X \to \mathbb{R}$$

definita su un sottoinsieme X della retta reale $\mathbb{R}$ e un punto di accumulazione x_0 di X.

Un numero reale ℓ é il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 se, fissato arbitrariamente un valore ε della distanza fra $f(x)$ e ℓ , si riesce a trovare, in corrispondenza di questo, un valore δ della distanza tra x ed x_0 per il quale tutti gli x, escluso x_0, che distano da x_0 meno di δ, si ha che $f(x)$ disti da ℓ meno di ε.

Formalmente, ℓ é limite se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un altro numero reale positivo δ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni x in X con $0 < |x - x_0| < \delta$.

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Una definizione equivalente che usa gli intorni é la seguente: ℓ é limite se per ogni intorno U di ℓ in $\mathbb{R}$ esiste un intorno V di x_0 in $\mathbb{R}$ tale che $f(x)$ appartiene a U per ogni $x \neq x_0$ con $x \in V \cap X$.

Il valore x_0 non é necessariamente contenuto nel dominio di f. Il valore e' comunque escluso nella definizione di limite, poiche' il limite deve dipendere soltanto dai valori di f in punti arbitrariamente vicini a x_0 ma non dal valore che f assume in x_0 : per questo motivo si chiede che $|x - x_0|$ sia maggiore di zero.

2.2 Estensione al caso infinito

La definizione di limite viene normalmente estesa per considerare anche i casi in cui x_0 e/o ℓ sono infiniti.

La funzione f ha limite infinito $\ell = +\infty$ in un punto finito x_0 se per ogni numero reale $N > 0$ esiste un altro numero reale $\delta > 0$ tale che $f(x) > N$ per ogni x in X con $0 < |x - x_0| < \delta$.

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Analogamente si definisce il limite $-\infty$ sostituendo $f(x) > N$ con $f(x) < -N$. Il limite per $x \to +\infty$ é L.

Per definire il limite per $x_0 = +\infty$, é ancora necessario che $x_0 = +\infty$ sia "punto di accumulazione" per il dominio X : questo si traduce nella richiesta che X contenga valori arbitrariamente grandi, cioé che il suo estremo superiore sia infinito:

$$\sup X = +\infty.$$

In questo caso, un numero finito ℓ é limite di f per $x \to +\infty$ se: Per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un altro numero reale $S > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni x in X con $x > S$.

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Analogamente si definisce il limite per $x \to -\infty$, sostituendo $x > S$ con $x < -S$.

Resta quindi da esaminare il caso in cui entrambi x_0 e ℓ sono infiniti. La funzione f ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$ se per ogni numero reale

$N > 0$ esiste un altro numero reale $S > 0$ tale che $f(x) > N$ per ogni x in X con $x > S$.

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Si definiscono analogamente i casi in cui $x_0 = -\infty$ e/o $\ell = -\infty$.

2.3 Proprietá dei limiti

Lemma 2.3.0.1. *Sia data una funzione*

$$f : X \to \mathbb{R}$$

e x_0 é punto di accumulazione di X.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se per ogni successione $x_n \to x_0$ con $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ abbiamo

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell.$$

Questa proprieta' ci permette di avere varie limti notevoli.

2.4 Alcuni Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{2.4.0.1}$$

$$\forall a > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} |x|^a = 0, \quad \forall a < 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} |x|^a = \infty, \tag{2.4.0.2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1. \tag{2.4.0.3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1. \tag{2.4.0.4}$$

2.5 Permanenza del segno

Teorema 2.5.1. *(Teorema di permanenza del segno) Se una funzione ha limite $\ell > 0$ strettamente positivo in x_0, allora assume valori strettamente positivi per ogni x sufficientemente vicino a x_0. In altre parole, esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) > 0$ per ogni x del dominio in V diverso da x_0.*

2.6 Confronto fra due funzioni

Teorema 2.6.1. *Siano f e g due funzioni definite su un dominio X, con x_0 punto di accumulazione per X. Se $f(x) \geq g(x)$ per ogni x del dominio in un intorno V di x_0 , e se entrambe le funzioni hanno limite in x_0, allora vale*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Idea della dimostrazione Applicare il teorema di permanenza del segno alla differenza $f - g$.

Teorema 2.6.2. *(Teorema del confronto) Una funzione "stretta fra due successioni" convergenti allo stesso limite converge anch'essa a questo limite. Formalmente, se f, g e h sono tre funzioni definite su un dominio X con punto di accumulazione x_0, tali che*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

per ogni $x \neq x_0$ del dominio in un intorno di x_0 , e tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$$

allora anche

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$

2.7 Operazioni con i limiti.

Funzioni aventi lo stesso dominio possono essere sommate o moltiplicate. In molti casi e‘ possibile determinare il limite della funzione risultante dai limiti delle singole funzioni.

Siano f e g due funzioni con lo stesso dominio X, e x_0 un punto di accumulazione per X. Se esistono i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$$

allora

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) &= c \cdot \ell_1 \qquad \forall c \in \mathbb{R} \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) &= \ell_1 \pm \ell_2 \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \ell_1 \cdot \ell_2, \\
\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{\ell_1} \qquad \text{se } \ell_1 \neq 0, \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\ell_1}{\ell_2} \qquad \text{se } \ell_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Chapter 3

Funzioni reali continue

Definizione 3.0.1. *(Definizione in termine di limite di una funzione.) Una funzione f si definisce continua nel punto p del suo dominio D se il suo limite per x tendente a p coincide con la valutazione della funzione in p, ovvero con $f(p)$. In simboli*

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Tale definizione é usata maggiormente per funzioni definite su un intervallo della retta reale: infatti, essa ha senso solo se p e' un punto di accumulazione per il dominio di f. Essa e' comunque estendibile anche nel caso di domini piu' complicati, che comprendono punti isolati: in essi, f risulta sempre continua.

Definizione 3.0.2. *(Definizione epsilon-delta.) Una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme D dei numeri reali a valori reali si dice continua in un punto $p \in D$ se per ogni numero $\varepsilon > 0$, esiste un secondo numero $\delta > 0$ tale che, per ogni punto $x \in D$ compreso nell'intervallo $(p - \delta, p + \delta)$, la funzione $f(x)$ dista da $f(p)$ per meno di ε, ovvero:*

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

In linguaggio simbolico, una funzione é continua in un punto $p \in D$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in D, |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Lemma 3.0.0.1. *La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ é continua in $p \in D$ se e solo se per ogni intorno V di $f(p)$ esiste un intorno U di p tale che*

$$f(U \cap D) = \{f(x); x \in D \cap U\} \subseteq V.$$

Definizione 3.0.3. *Se la funzione f é continua in ogni punto p nel dominio D di definizione della funzione, allora si dice che la funzione e' continua. Usiamo la notazione*

$$f \in C(D).$$

Lemma 3.0.0.2. *Se $f \in C(D)$ allora per ogni aperto V (in $\mathbb{R}$) il suo controimagine*

$$f^{-1}(V) = \{x \in D; f(x) \in V\}$$

é aperto in D.

Dimostrazione. Sia $p \in f^{-1}(V)$. Se $f(p) \in V$ e V é aperto allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$(f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \subset V.$$

La continuitá di f in p implica che esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D, |x - p| \leq \delta \implies |f(x) - f(p)| \leq \varepsilon$$

e quindi $f(x) \in V$. Cosi deduciamo che

$$D \cap \{x; |p - x| \leq \delta\} \subset f^{-1}(V).$$

e quindi $f^{-1}(V)$ é aperto in D.

□

Problema 3.0.0.1. *Se per ogni aperto V (in $\mathbb{R}$) il suo controimagine*

$$f^{-1}(V) = \{x \in D; f(x) \in V\}$$

é aperto in D, allora $f \in C(D)$.

3.1 Proprieta‘ delle funzioni continue

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua a valori reali. Valgono:

Teorema 3.1.1. *(Permanenza del segno): Se in un punto p del suo dominio $f(p) > 0$, allora esiste un intorno $U(p)$ tale che $f(x) > 0$ in tutti i punti $x \in I$ dell'intorno.*

Operazioni con funzioni continue:

1. La somma $f+g$ di due funzioni continue e‘ una funzione continua.

2. La differenza $f - g$ di due funzioni continue e‘ una funzione continua.

3. Il prodotto $f.g$ di due funzioni continue e‘ una funzione continua.

4. Il quoziente f/g di due funzioni continue e‘ una funzione continua (nell'insieme di definizione, ovvero dove g é diversa da 0).

Altri proprietá di base:
La controimmagine di un insieme aperto e‘ un insieme aperto. (vedi Lemma 3.0.0.1.)

Problema 3.1.0.1. *Non e‘ vero in generale che l'immagine di un insieme aperto sia un insieme aperto. Costruire controesempio.*

Problema 3.1.0.2. *La controimmagine di un insieme chiuso é un insieme chiuso.*

Problema 3.1.0.3. *L'immagine di un insieme compatto e‘ un insieme compatto.*

Definizione 3.1.1. *Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ é connesso se non esiste una representazione*
$$A = U_1 \cup U_2$$
di A con $U_1 = A \cap V_1 \neq \emptyset$, $U_2 = A \cap V_2 \neq \emptyset$ disgiunti, cioé $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e V_1, V_2 aperti in $\mathbb{R}$.

Definizione 3.1.2. *Intervallo I in $\mathbb{R}$ é ogni sottoinsieme tale che $x_1 \in I, x_2 \in I, x_2 > x_1$ implica $y \in I$ per ogni $y \in (x_1, x_2)$.*

Esempio 3.1.0.1. *Se $a < b$ allora*

$$[a, b], (a, b], [a, b), (a, b),$$

sono tutti intervalli con estremi a, b.

Esempio 3.1.0.2. *Se $a \in \mathbb{R}$ alloa*

$$[a, \infty), (a, \infty),$$

sono tutti intervalli con estremi $a, +\infty$.

Esempio 3.1.0.3. *Se $b \in \mathbb{R}$ allora*

$$(-\infty, b], (-\infty, b)$$

sono tutti intervalli con estremi $-\infty, b$.

Lemma 3.1.0.1. *Un sottinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ é connesso se e solo se é un intervallo.*

Dimostrazione: ogni connesso é intervallo. Se I non é intervallo, esistono $x_1 < x_2$ in I ed esiste $y \in (x_1, x_2)$ tale che $y \notin I$. L'identitá

$$I = (I \cap (-\infty, y)) \cup (I \cap (y, \infty))$$

dimostra che I non é connesso. □

Lemma 3.1.0.2. *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é un insieme conesso e $f : I \to \mathbb{R}$ é continua, allora $F(I)$ é conesso.*

Dimostrazione. Se

$$F(I) = U_1 \cup U_2,$$

dove

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset,\ U_1 \neq \emptyset, U_2 \neq \emptyset \tag{3.1.0.1}$$

$$U_j = F(I) \cap V_j, j = 1, 2,$$

e V_j sono aperti allora

$$I = (I \cap F^{-1}(V_1)) \cup (I \cap F^{-1}(V_1))$$

e troviamo contradizione con l'ipotesi che I é connesso. □

3.2 Limite destro e sinistro e funzioni monotone

3.2.1 Limite destro e sinistro

Per avere informazioni piu‘ precise é a volte utile utilizzare i concetti di limite destro e limite sinistro, definiti tramite la nozione di intorno destro e sinistro.

Un intorno destro di un punto x_0 della retta estesa $\mathbb{R}^*$ é un intervallo del tipo $[x_0, x_0 + r)$ con $r > 0$. Analogamente, un intorno sinistro é un intervallo del tipo $(x_0 - r, x_0]$. In particolare, gli intorni di $-\infty$ sono tutti destri e quelli di $+\infty$ sono sinistri. A questo punto, sia

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

con x_0 punto di accumulazione per X. Un valore ℓ della retta estesa é limite destro per f in x_0 se per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno destro V^+ di x_0 tale che $f(x)$ appartiene a U per ogni x in $V^+ \cap X$.

Il limite sinistro e‘ definito in modo analogo. I limiti sinistro e destro (se esistono) vengono descritti rispettivamente come

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Vale il risultato seguente:

Lemma 3.2.1.1. *Una funzione ha limite in x_0 se e soltanto se ha limite destro e sinistro, e questi due limiti sono finiti e coincidono.*

La funzione é discontinua in x_0 se non é continua.

Definizione 3.2.1. *(Discontinuita‘ di prima specie (o di salto)) Sia $f : I \to J$. Un punto $x_0 \in I$ é di discontinuita‘ di prima specie per f quando esistono i limiti sinistro e destro della funzione per x che tende a x_0 e sono entrambi finiti, ma sono diversi. Ovvero quando valgono tutte le seguenti condizioni:*

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) =: f(x_0^-) \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) =: f(x_0^+) \in \mathbb{R}$$

$$f(x_0^-) \neq f(x_0^+).$$

La discontinuitá viene comunemente definita "di salto" perche' l'aspetto del grafico e' quello di un salto nel punto di discontinuita'. Viene inoltre detto "salto" la quantita' $f(x_0^+) - f(x_0^-)$.

Lemma 3.2.1.2. *Sia $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f ha limite destro e sinistro in ogni punto del suo dominio.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in (a, b)$ fissato. Se

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots, \; x_n < x_0,$$

é una successiona monotona crescente che tende a $x_0 \in I$ allora

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \cdots \leq f(x_n) \leq \cdots$$

é una successione monotona crescente e quindi converge (ad $a \leq f(x_0)$). Se

$$\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \cdots, \widetilde{x_m}, \cdots, \; \widetilde{x_m} < x_0,$$

é un'altra successione che tende a x_0 si puo vedere che

$$f(\widetilde{x_m}) \to a.$$

In fatti, per ogni $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ si trova m_0 tale che

$$x_n < \widetilde{x_m} < x_0, \; \forall m \geq m_0.$$

Cosí per ogni punto b di accumulazione della successione

$$\{f(\widetilde{x_m})\}_{m \in \mathbb{N}}$$

possiamo supporre che

$$f(\widetilde{x_m}) \to b$$

e troviamo

$$f(x_n) < f(\widetilde{x_m}), \; \forall m \geq m_0.$$

Queste disequazioni implicano

$$f(x_n) \leq \lim_{m\to\infty} f(\widetilde{x_m}) = b$$

e poi prendendo limite $n \to \infty$ troviamo

$$a = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq b = \lim_{m\to\infty} f(\widetilde{x_m}).$$

In modo simile si dimostra

$$b = \lim_{m\to\infty} f(\widetilde{x_m}) \leq a = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Cosi limite a sinistra esiste. □

Lemma 3.2.1.3. *Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f puo' avere solo discontinuita' a salto.*

Proof. Sia l'intervallo $[a, b]$ l'insieme di definizione della funzione f e sia x_0 un punto di discontinuitá della funzione. Si dimostrerá per esclusione che questa non puo' che essere di prima specie.

Si consideri f ad esempio monotona non decrescente (un discorso analogo vale per una funzione non crescente).

Data la proprieta' precedente, f ammette limite sinistro e destro in x_0 :

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) =: f(x_0^-), \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) =: f(x_0^+)$$

E deve essere, per la monotonia,

$$f(a) \leq f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \leq f(b),$$

percio' i limiti devono esistere finiti. Questo significa che la discontinuita' non puo' essere di seconda specie.

Poiché x_0 é di discontinuitá non puó essere

$$f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+),$$

perció $f(x_0^-)$ e $f(x_0^+)$ non sono eguali, il che esclude anche la discontinuita' "eliminabile".

Per esclusione, allora, in x_0 si ha una discontinuita' di prima specie. □

Problema 3.2.1.1. *Sia $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f puó avere solo una quantitá finita o, al piú, numerabile di discontinuitá nel suo dominio.*

3.3 Teoremi di Bolzano e Weierstrass

Teorema 3.3.1. *(Teorema dei valori intermedi) Se a e b sono due punti del dominio, $f : I \to \mathbb{R}$ é continua e $[a, b] \subseteq I$, allora f assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ e $f(b)$.*

Il teorema dei valori intermedi segue del seguente.

Teorema 3.3.2. *Teorema di Bolzano: Se a e b sono due punti del dominio tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ovvero se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno diverso), allora esiste almeno un $p \in (a, b)$ tale che $f(p) = 0$.*

Idea della dimostrazione. Sia $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Definiamo

$$p = supA,$$

dove

$$A = \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}.$$

□

Altra idea della dimostrazione Usare Lemma 3.1.0.2.

Teorema 3.3.3. *(Teorema di Weierstrass) Se l'intervallo I e' chiuso e limitato, ovvero se $I = [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é continua, allora f ammette massimo e minimo, ovvero esistono due punti p e q tali che $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ per ogni $x \in [a, b]$.*

Dimostrazione. Poniamo $S = \sup(f[a, b])$ e individuiamo una successione $y_n = f(x_n), x_n \in [a, b]$ tale che $y_n \to S$ per $n \to \infty$.

Per il teorema di Bolzano - Weierstrass (x_n) ha una sottosuccessione (x_{k_n}) che converge verso $q \in [a, b]$.

Per la continuita' di f abbiamo $f(x_{k_n}) \to f(q)$ per $n \to \infty$. D'altra parte $y_{k_n} \to S$ per $n \to \infty$. Quindi per l'unicitá del limite abbiamo $S = f(q)$, cioe' la funzione ha in q un massimo assoluto. Similmente si dimostra anche l'esistenza di un punto p dove la funzione assume il valore minimo. □

Problema 3.3.0.1. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é chiuso e limitato e $f : K \to \mathbb{R}$ é continua, allora $f(K)$ é compatto e f ammette massimo e minimo, ovvero esistono due punti p e q tali che $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ per ogni $x \in K$.*

Lemma 3.3.0.1. *(Criterio di continuitá per le funzioni monotone) Sia $I = [a,b]$ un intervallo limitato é chiuso in $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) f é continua,

b) l'immagine $f(I)$ é un intervallo.

Dimostrazione. Segue del Lemma 3.2.1.3.

□

L'implicazione non vale in generale per le funzioni la cui immagine non é un intervallo.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ é crescentese se

$$f(x_1) < f(x_2)$$

per ogni due numeri $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ é decrescentese se

$$f(x_1) > f(x_2)$$

per ogni due numeri $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$.

Lemma 3.3.0.2. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ é continua e strettamente crescente(decrscente) con imagine J allora f e invertibile con funzione inverse continua, cioé esiste una funzione $g : J \to I$ continua tale che*

$$g(f(x)) = x \ \forall x \in I, \ \ f(g(y)) = y \ \forall y \in J.$$

Idea della dimostrazione. Supponiamo che $f(x)$ é strett. crescente e continua in $[a,b]$. Qesta condizione implica f é iniettiva (perché cresce strettamente). Per il criterio di continuitá per le funzioni monotone(vedi Teorema 3.3.0.1)

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

da qui otteniamo che f é suriettiva e quindi f é biiettiva. Cosi possiamo definire

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b].$$

In particolare, f^{-1} assume tutti i valori dell'intervallo $[a,b]$; e di nuovo per il criterio di continuitá per le funzioni monotone(Teorema 3.3.0.1) f^{-1} é continua.

3.3.1 Continuitá uniforme

Definizione 3.3.1. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$. La funzione f é uniformemente continua se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, comunque presi due punti p e q nel dominio I di f che distano per meno di δ, allora le loro immagini $f(p)$ e $f(q)$ distano per meno di ε.*

Teorema 3.3.4. *(Teorema di Heine - Cantor) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ é compatto e $f : I \to \mathbb{R}$ e continua, allora f e‘ uniformemente continua.*

Proof. Assumiamo, per assurdo, che non valga la tesi. La negazione di

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall p, q \in I, |p - q| < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon$$

equivale a

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists p = p_\delta, q = q_\delta \in I : |p_\delta - q_\delta| < \delta, |f(p_\delta) - f(q_\delta)) \geq \varepsilon_0.$$

Supponiamo dunque che esista $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistano punti p_δ, q_δ tali che $|p_\delta - y_\delta| < \delta$ e $|f(p_\delta) - f(q_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Scegliamo $\delta = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ e denotiamo con p_n e q_n i corrispondenti punti p_δ, q_δ .

In questo modo si definiscono due successioni di punti $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Poiche' I e‘ compatto da $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si puo‘ estrarre una sotto-successione convergente ad un punto $p^* \in I$; sia essa $\{p_{n_j}\}$.

Poiché

$$|p_{n_j} - q_{n_j}| < \frac{1}{n_j} \to 0$$

per $j \to +\infty$, si ha

$$|q_{n_j} - p^*| \leq |p_{n_j} - q_{n_j}| + |p_{n_j} - x^*| \to 0$$

per $j \to +\infty$. Quindi anche $\{q_{n_j}\}$ converge a p^*. Poiche' per ogni j si ha

$$|f(p_{n_j}) - f(q_{n_j})| \leq |f(p_{n_j}) - f(p^*)| + |f(q_{n_j}) - f(p^*)|$$

e il secondo membro tende a zero per la continuita‘ della funzione, segue

$$\lim_{j\to\infty} |f(p_{n_j}) - f(q_{n_j})| = 0$$

incompatibile con l'ipotesi d'assurdo

$$|f(p_\delta) - f(q_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

□

Teorema 3.3.5. *(Composizione) La composizione di funzioni continue é una funzione continua, ovvero se f e g sono due funzioni continue, allora anche:*

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e' una funzione continua.

Chapter 4

Esercizi limiti, continuitá, funzioni inversi

4.1 Funzioni trigonometriche

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Per $0 < \alpha < \pi$

$$\sin\alpha < \alpha$$

e

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \cos\alpha.$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}, \ \sin\alpha\sin\beta = \frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \ \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\arcsin x = \alpha, x \in [-1,1] \Leftrightarrow \sin\alpha = x\ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\arccos x = \alpha, x \in [-1,1] \Leftrightarrow \cos\alpha = x\ \alpha \in [0, \pi],$$

$$\arctan x = \alpha, x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow \tan\alpha = x\ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\sin x = \sin x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + 2k\pi, \pi - x_0 + 2k\pi,\ \cos x = \cos x_0 \Leftrightarrow x = \pm x_0 + 2k\pi,$$

$$\tan x = \tan x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi,$$

Problema 4.1.0.1. *Calcolare* $\cos(2\alpha)$ *se* $\sin\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}}/2.$

Risp. $\sqrt{3}/2.$

Problema 4.1.0.2. *Dimostrare che*

$$\sin\alpha.\cos(\alpha+\beta) = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha+\beta) = 2\tan\alpha;$$

$$\sin(2\alpha+\beta) = 5\sin\beta \quad \Rightarrow \quad 2\tan(\alpha+\beta) = 3\tan\alpha.$$

Suggerimento. Abbiamo

$$\tan(\alpha+\beta) = 2\tan\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha = 2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sin\beta = \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha.$$

Abbiamo inoltre

$$2\tan(\alpha+\beta) = 3\tan\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha = 3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$$

e usando

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B),$$

troviamo

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha = 3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha \Longleftrightarrow \sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta = \frac{3}{2}\left(\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta\right).$$

$\square$

Problema 4.1.0.3. *Semplificare le espressioni*

$$a)\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin(2\alpha)},$$

$$b)\sqrt{\sin^2\alpha\ (1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha\ (1+\tan\alpha)}, (\pi<\alpha<3\pi/2.$$

Risp. a) 1; *b)* $-\sin\alpha-\cos\alpha$.

Problema 4.1.0.4. *Dimostrare le identita'*

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$$

$$1-\cot^2\alpha\ \cot^2\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\beta}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha\cos\gamma}=0.$$

Problema 4.1.0.5. *Per quali valori del parametro a valgono le relazioni*

$$a)\sin(\pi-a)=\sin a,$$

$$b)\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a},$$

$$c)\sqrt{1+\sin(2a)}=\sin a+\cos a.$$

Problema 4.1.0.6. *Dimostrare che l'identitá $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$ implica*

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right).$$

Problema 4.1.0.7. *Dimostrare l'identita'*

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x=\frac{\sin 5x/2}{2\sin(x/2)}.$$

Problema 4.1.0.8. *Calcolare* $\sin 18^0$.

Problema 4.1.0.9. *Dimostrare che*

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha\quad\Rightarrow\quad z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(n\alpha)\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Problema 4.1.0.10. *Trovare tutti x tali che*

$$a)\, \sin 5x = \cos 2x,$$
$$b)\, \sin(2x) + \tan x = 2,$$
$$c)\, \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 5,$$
$$d)\, \tan(\pi \tan x) = \cot(\pi \cot x),$$
$$e)\, \sin^{17} x + \cos^{17} x = 1.$$

Problema 4.1.0.11. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \sin x} > 2.$$

Problema 4.1.0.12. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$2^{\sin x} > 2^{\cos x}.$$

Problema 4.1.0.13. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|\sin x + \cos x| < 1.$$

4.1.1 Funzioni trigonometriche ed induzione

Problema 4.1.1.1. *Dimostrare le seguente identitá:*

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1) \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1 \right),$$

$$x^{2n+1} - 1 = (x+1) \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 + 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1 \right),$$

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 - 2x \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + 1 \right).$$

Problema 4.1.1.2. *Dimostrare le seguente identitá:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \cdots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) \cdots \cos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}}.$$

4.2 Funzioni $\log$ e $\exp$

Definizione : $\log_a b$ e' definito per $a > 0, a \neq 1$, e $b > 0$.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Proprieta':

$$\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2, a > 0, a \neq 1, b_1, b_2 > 0,$$

$$\log_a(b^d) = d \log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0, d \in \mathbb{R}.$$

$$\log_a b = \frac{\log_A b}{\log_A a}, \ a, A > 0, a \neq 1, A \neq 1, b > 0.$$

Problema 4.2.0.1. *Risolvere le seguente equazioni*

$$a) \quad \log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1,$$

$$b) \quad -\frac{5}{4} + \log_x(5\sqrt{5}) = \left(\log_{x^2} \sqrt{5}\right)^2,$$

$$c) \quad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}.$$

4.3 Esercizi limiti delle successioni

Problema 4.3.0.1. *Trovare il limite della successione*

$$a_n = \sqrt{n} \ln(1 + \mathrm{e}^n) - n^{3/2}.$$

Risposta 0

Problema 4.3.0.2. *Trovare il limite della successione*

$$a_n = \sqrt{n} \ln(1 + \mathrm{e}^n) - n\sqrt{n-1}.$$

Risposta ∞.

Problema 4.3.0.3. *Studiare la convergenza della successione*

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 4.3.0.4. *Studiare la convergenza della successione*

$$a_n = n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2 + \arctan n} - \sqrt[3]{n^2 + n} \right)$$

per $\alpha < 1/3$.

Problema 4.3.0.5. *Sia*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} \right) \right|^{\alpha n}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 4.3.0.6. *Studiare la convergenza della successione*

$$n^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \right)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 4.3.0.7. *Studiare l'esistenza del limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}}{\log_2 n}$$

Problema 4.3.0.8. *Studiare la convergenza della successione*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

4.3.1 Successioni e funzione inverse

Problema 4.3.1.1. *Sia $X(M)$ l'insieme*

$$X(M) = \{x \in (-M, M); \{x\} = \frac{2}{\pi} \arctan x\},$$

dove $b(x) = \{x\}$ é la parte frazionaria di x cioé'

$$0 \leq b(x) < 1, 0 \leq x - b(x) < 1, x - b(x) \in \mathbb{N}.$$

Studiare l'esistenza dell'limite

$$\lim_{M \nearrow \infty} \frac{card(X(M))}{M}.$$

Soluzione. Se $M \geq 1$ é un numero intero si puo vedereche (tracciando i grafici delle funzioni $b(x)$, $f_1(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$

$$\leq card(X(M)) = (M - 1).$$

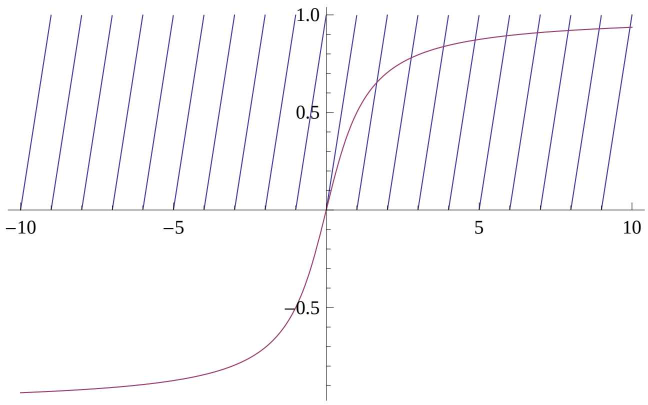

Figure 4.1: I punti d'intersezione dei grafici di $b(x), f_1(x)$

Cosi otteniamo

$$\frac{card(X(M))}{M} \to 1.$$

□

Problema 4.3.1.2. *Sia $A(N)$ l'insieme*

$$A(N) = \{x \in (-N, N); x = -\tan x\}.$$

Studiare l'esistenza dell'limite

$$\lim_{N \nearrow \infty} \frac{card(A(N))}{N}.$$

Soluzione. Se $k\pi \leq N < (k+1)\pi$ si puo vedereche

$$(2k+1) \leq card(A(N)) \leq (2k+3).$$

Cosi otteniamo

$$card(A(N)) \leq \frac{2N}{\pi} + 3$$

$$card(A(N)) \geq 2k+1 \geq 2\frac{N}{\pi} - 2 + 1.$$

e quindi

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{N} \leq \frac{card(A(N))}{N} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{3}{N}$$

Cosi otteniamo

$$\lim_{N \nearrow \infty} \frac{card(A(N))}{N} = \frac{2}{\pi}.$$

$\square$

4.4 Esercizi limiti delle funzioni

4.4.1 Alcuni Limiti notevoli ed esercizi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \tag{4.4.1.1}$$

$$\forall A > 0, \forall B > 1 \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\log_B x}{x^A} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^A}{B^x} = 0. \tag{4.4.1.2}$$

Limiti indeterminati:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty$$

Limiti determinati

$$\frac{0}{\infty} = 0, \quad 0.0 = 0.$$

4.4.2 Esercizi sui limiti delle funzioni

Problema 4.4.2.1. *Trovare il limite*

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 7x + 6}{3 - 2x - x^2}; \quad b) \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 7x^2 + 6}{3 - 2x - x^4}; \quad c) \lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 7x^2 + 6}{3 - 2x - x^2};$$

Risp. a) 2; b) -1; c) $2,5$.

Problema 4.4.2.2. *Trovare il limite*

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 + 3}{x^2 - 1}, \quad b) \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 + x}{x^2 - x}; \quad c) \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1};$$

$$d) \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 1}; \quad e) \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{3x - x^3};$$

Risp. a) -3; b) -1; c) $-3/2$; d) 1; e) $3/5$; f) 4.

Problema 4.4.2.3. *Trovare il limite*

$$a) \lim_{x\to 4} \frac{1 - x + \sqrt{5+x}}{x - 4}; \quad b) \lim_{x\to 2/5} \frac{3\sqrt{10x} - 15x}{4 - 2\sqrt{10x}}; \quad c) \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x;$$

$$d) \lim_{x\to 9} \frac{x + \sqrt{x} - 12}{x - 7\sqrt{x} + 12} + \frac{\sqrt{x^2 - 8x} - 2}{x - 6}; \quad e) \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 3};$$

$$f) \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}; \quad g) \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{9x^2+5} - 3x); \quad h) \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{9x^2+5} - 3x);$$

$$i) \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 2} - \sqrt{x^2 - 10x + 3}.$$

Risp. a) $-5/6$; b) $3/2$; c) 0; d) $-20/3$; e) $1/4$; f) $2/3$; g) $5/6$; h)$-\infty$ i) ± 3.

Problema 4.4.2.4. *Trovare il limite*

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x+x^2}-1}{x},\quad b)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+2x+x^2}-1}{x};\quad c)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-3x^2}+2}{x^2-1};$$

$$d)\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x+3}-x+7;\quad e)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^3+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}};\quad f)\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+x^3}-\sqrt[3]{-x+x^3}.$$

Problema 4.4.2.5. *Troovare il limite*

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2},;\quad b)\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x+2}\right),\quad c)\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x};$$

$$d)\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^2 x};\quad e)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x};\quad f)\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x};$$

$$g)\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-6x+5)\sin(x-1)}{(x-1)^2};\quad h)\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+5x-2)\tan x}{x^2+3x};\quad i)\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cos(\pi x/4)};$$

$$j)\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-x^2/\pi^2};\quad k)\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right);\quad \ell)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(4x)}.$$

Risp. a) $9/2$; b) 1; c) -1; d) 0; e) $3/4$; f) $\sqrt{3}/3$; g) -4; h) $-2/3$; i) $-16/\pi$; j) $\pi/2$; k) $1/2$; ℓ) $1/16$.

Problema 4.4.2.6. *Calcolare limite*

$$\lim_{x\to -1}\cos\left(\frac{\pi(\sqrt[3]{x}+1)}{x+1}\right)$$

Risp. $1/2$.

Problema 4.4.2.7. *Vedere se esiste il limite*

$$\lim_{x\to +\infty}\sin\left(\frac{\pi(\sqrt[2]{x^2-x}+1)}{x+1}\right)$$

Risp. 0.

Problema 4.4.2.8. *Vedere se esiste il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x^2)}{\sin x}.$$

Risp. 0.

Problema 4.4.2.9. *Vedere se esiste il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin |x|^a},$$

dove $0 < a < 3$.

Risp. 0.

Problema 4.4.2.10. *Trovare il limite* $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ *dove*

$f(x)$	$g(x)$	x_0	*risposta 1*	*risposta 2*	*risposta 3*
$\ln(x+\sqrt{1-2x})$	x^2	0	◯ *altra*	◯ 0.5	◯ -0.5
$4 - 4\sin x$	$(2x-\pi)^2$	$\pi/2$	◯ $0,25$	◯ 0.5	◯ *altra*
$\sqrt{x^2+x^3}+\sqrt{x^2}$	$\tan x$	0	◯ 2	◯ *altra*	◯ 1

Problema 4.4.2.11. *Calcolare il valore dei seguenti limiti di funzioni:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x} \tag{4.4.2.3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{3+x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{2^x+5^x-2}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{5^x-2^x}{3^x-9^x} \tag{4.4.2.4}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{x^x}, \quad \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right). \tag{4.4.2.5}$$

Problema 4.4.2.12. *Trovare i limiti:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x+x^2}-1}{x}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+2x+x^2}-1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2},$$
$$\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x+2}\right),$$
$$\lim_{x\to 1} (x-1)^{-1} \arcsin\left(\frac{x-1}{x+2}\right),$$
$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln(2x/\pi)}{(2x-\pi)}.$$

Problema 4.4.2.13. *(ogni risposta ha massimo 3 punti) Trovare il limite* $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ *dove*

$f(x)$	$g(x)$	x_0	*risposta 1*	*risposta 2*	*risposta 3*
$\ln(x+\sqrt{1-2x})$	x^2	0	◯ *altra*	◯ 0.5	◯ −0.5
$4-4\sin x$	$(2x-\pi)^2$	$\pi/2$	◯ 0, 25	◯ 0.5	◯ *altra*
$\sqrt{x^2+x^3}+\sqrt{x^2}$	$\tan x$	0	◯ 2	◯ *altra*	◯ 1

Problema 4.4.2.14. *Calcolare limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(4x)} \tag{4.4.2.6}$$

Problema 4.4.2.15. *Calcolare limite*

$$\lim_{x\to -1} \cos\left(\frac{\pi(\sqrt[3]{x}+1)}{x+1}\right) \tag{4.4.2.7}$$

Problema 4.4.2.16. *Vedere se esiste il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{\pi(\sqrt[2]{x^2-x}+1)}{x+1}\right) \tag{4.4.2.8}$$

Problema 4.4.2.17. *Vedere se esiste il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\pi(\sqrt[2]{x^2-x}+1)\right) \tag{4.4.2.9}$$

Problema 4.4.2.18. *Calcolare limite*

$$\lim_{x\to 0} (1-x)^{1/\cos(x-\pi/2)}. \tag{4.4.2.10}$$

4.5 Esercizi sulla continuitá

Problema 4.5.0.1. *Non e' vero in generale che l'immagine di un insieme aperto sia un insieme aperto. Costruire controesempio.*

Suggerimento $f(x) = x^2$. L'immagine del insieme $\{x; |x| < 1\}$ non é un insieme aperto.

Problema 4.5.0.2. *Trovare una funzione*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che

- *l'immagine di ogni aperto é aperto (la mappa é aperta)*
- *la funzione non é continua*

Problema 4.5.0.3. *Se* $I = J = [0,1]$ *e*

$$f : I \longrightarrow J$$

é una bijezione continua, allora f *é aperta.*

Problema 4.5.0.4. *Se* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é continua e* $f(0) = f(1)$ *allora esistono* $x, y \in [0,1)$ *tale che* $f(x) = f(y)$.

Suggerimento. Sia

$$m = \min f, \ \ M = \max f.$$

Se x_- e x_+ sono tali che

$$f(x_-) = m, f(x_+) = M.$$

Se $m < f(0) = f(1)$ allora f non é iniettiva.

Problema 4.5.0.5. *Se*

$$F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

é una funzione continua ed aperta, allora F *e monotona.*

4.5.1 Le funzione arcsin, arccos, arctan, ln

La funzione $\sin\alpha$ é crescente per $\alpha \in I = [-\pi/2, \pi/2]$. L'imagine e $J = [-1, 1]$. Allora la funzione inversa é $\arcsin x$ con dominio $J = [-1, 1]$ e l'imagine $I = [-\pi/2, \pi/2]$.

$$\arcsin x = \alpha, x \in [-1, 1] \Leftrightarrow \sin\alpha = x \ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2].$$

La funzione $\cos\alpha$ é decrescente per $\alpha \in I = [0, \pi]$. L'imagine é $J = [-1, 1]$. Allora la funzione inversa é $\arccos x$ con dominio $J = [-1, 1]$ e l'imagine $I = [0, \pi]$.

$$\arccos x = \alpha, x \in [-1, 1] \Leftrightarrow \cos\alpha = x \ \alpha \in [0, \pi],$$

La funzione $\tan\alpha$ é crescente per $\alpha \in I = (-\pi/2, \pi/2)$. L'imagine é $J = [-\infty, \infty]$. Allora la funzione inversa é $\arctan x$ con dominio $J = (-\infty, \infty)$ e imagine $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

$$\arctan x = \alpha, x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow \tan\alpha = x \ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2],$$

La funzione e^x é crescente per $x \in I = (-\infty, \infty)$. L'imagine e $J = (0, \infty)$. Allora la funzione inversa é $\ln x$ con dominio $J = (0, \infty)$ e imagine $I = (-\infty, \infty)$.

Problema 4.5.1.1. *Trovare l'imagine e la inversa (se esiste) delle funzione*

a) $f(x) = 1 + 2/x$ *con dominio* $(0, 1)$.

b) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$ *con dominio* $I = (-1, 1))$.

Problema 4.5.1.2. *Per quale intervallo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *la funzione* $f(x) = x + |x^2 - 1|$ *con dominio* I *é invertibile e continua ?*

Problema 4.5.1.3. *Studiare la continuita' della funzione* $f(x) = \sin x/(1+\cos x)$ *con dominio* $I = (0, \pi)$.

Problema 4.5.1.4. *Studiare la continuita' della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{altrimente.} \end{cases}$$

con dominio $I = [-1, 1]$.

Chapter 5

Numeri Complessi

5.1 Definizione e primi proprietá

Definizione 5.1.1. *L'insieme di numeri complessi* $\mathbb{C}$ *e definito come*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

con due operazioni:

- *la somma delle coppie* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *é definita con*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

- *il prodotto della coppie* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *é definita con*

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

L'insieme $\mathbb{C}$ con l'operazione somma é un gruppo comutativo con elemento neutro

$$0 = (0, 0).$$

Per ogni $z = (x, y)$ poniamo

$$-z = (-x, -y).$$

Si possano verificare le proprietá

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \text{ é gruppo commutativo rispetto la somma, cioé} \\ (a+b)+c = a+(b+c),\ \forall a,b,c \in \mathbb{C} \\ a+0 = 0+a = a,\ \forall a \in \mathbb{C}, \\ a+(-a) = 0,\ \ \forall a \in \mathbb{C} \\ a+b = b+a,\ \ \forall a,b \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{5.1.0.1}$$

$\mathbb{C}$ é anello cioé $\mathbb{C}$ é gruppo abeliano rispetto la somma come in (5.1.0.1), il prodotto é associativo

$$(a.b).c = a.(b.c),\ \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$$

e la moltiplicazione e distributiva rispetto alla somma:

$$\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), \\ (a+b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c). \end{aligned} \tag{5.1.0.2}$$

Finalmente $\mathbb{C}$ risulta un campo, cioé anello commutativo, tale che $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ é gruppo abeliano rispetto il prodotto. In fatti, l'elemento neutro e

$$1 = (1,0).$$

Il fatto che $\mathbb{C}$ é campo pratticamnte implica che

$$\forall a \neq 0, \exists b \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ ab = 1. \tag{5.1.0.3}$$

La verifica di (5.1.0.3) si puo fare come segue. Se

$$a = (x,y) \neq 0$$

allora

$$x^2 + y^2 \neq 0$$

e

$$b = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

verifica (5.1.0.3).

Definizione 5.1.2. *Se $z = (x, y)$ é un numero complesso allora*

$$\overline{z} = (x, -y)$$

si chiama coniugato a $z \in \mathbb{C}$.

Se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, allora abbiamo la relazione

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2. \tag{5.1.0.4}$$

Se $z = (x, y)$ abbiamo inoltre la relazione

$$(x, 0) = \frac{z + \bar{z}}{2}. \tag{5.1.0.5}$$

Possiamo identificare $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$. Cosi (5.1.0.5) diventa

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

Usando la definizione del prodotto in $\mathbb{C}$ si vede che per ogni numero reale $\alpha = (\alpha, 0)$ e per ogi numero complesso $z = (x, y)$ abbiamo

$$\alpha z = (\alpha, 0).(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Notazioni. Numero imaginario $\mathbf{i}$ é

$$\mathbf{i} = (0, 1).$$

La parte reale di $z = (x, y)$ é

$$\mathrm{Re} z = x,$$

la parte imaginaria di $z = (x, y)$ é

$$\mathrm{Im} z = y,$$

$\square$

Abbiamo le relazioni

$$\mathbf{i}^2 = -1, \ \mathbf{i}^3 = -\mathbf{i}, \ \mathbf{i}^4 = 1 \tag{5.1.0.6}$$

e quindi

$$\mathbf{i}^m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 4k, k \in \mathbb{Z}; \\ \mathbf{i}, & \text{se } m = 4k+1, k \in \mathbb{Z}; \\ -1, & \text{se } m = 4k+2, k \in \mathbb{Z}; \\ -\mathbf{i}, & \text{se } m = 4k+3, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{5.1.0.7}$$

Se $z = (x, y)$ allora

$$z = x + \mathbf{i}y$$

e usando (5.1.0.5) troviamo

$$\mathrm{Re}z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2\mathbf{i}}. \tag{5.1.0.8}$$

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non puo' avere soluzioni reali dato che non ha senso (nel campo dei numeri reali) considerare $\sqrt{-1}$. Tuttavia l'equazione scritta sopra ha soluzione se ampliamo l'insieme dei numeri reali con l'aggiunta dell'unita' immaginaria $\mathbf{i} = (0, 1)$ che gode della proprieta'

$$\mathbf{i}^2 = -1. \tag{5.1.0.9}$$

UCos'i l'insieme di numeri complessi si puo rappresentare come

$$\mathbf{C} \equiv \{z = x + \mathbf{i}y, x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Se $z = x + \mathbf{i}y$ con $x, y \in \mathbf{R}$, allora x ed y si chiamano ripettivamente parte reale e parte immaginaria del numero complesso z e si indicano con $\mathcal{R}e\ z$ ed $\mathcal{I}m\ z$.

La somma e la moltiplicazione tra numeri complessi segue le stesse regole della moltiplicazione tra numeri reali, tenendo conto del fatto che per l'unita' immaginaria $\mathbf{i}$ vale la regola (5.1.0.9). Quindi

$$x + \mathbf{i}y + x' + \mathbf{i}y' = (x + x') + \mathbf{i}(y + y')$$

$$(x + \mathbf{i}y)(x' + \mathbf{i}y') = xx' + \mathbf{i}xy' + \mathbf{i}x'y + \mathbf{i}^2yy' = (xx' - yy') + \mathbf{i}(xy' + x'y).$$

Dato $z = x + \mathbf{i}y$ si definisce

$$\bar{z} = x - \mathbf{i}y$$

e

$$|z|^2 = x^2 + y^2.$$

Si puo' anche definire il rapporto tra numeri complessi come segue:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

(notare che il secondo membro ha senso visto che la moltiplicazione dei tre numeri $z, \bar{w}, \frac{1}{|z|^2}$ si puo' fare seguendo la regola di prodotto descritta sopra).

Ogni numero complesso $z = x+\mathbf{i}y$ e' individuato da due numeri reali (la parte reale e la parte immaginaria). Pertanto i numeri complessi possono essere individuati da un punto nel piano cartesiano $x - y$. D'altra parte ogni punto (x, y) del piano puo' essere individuato in coordinate polari dalla distanza del punto dall'origine ρ e dall'angolo θ formato tra l'asse delle x e la semiretta passante per il punto (x, y) e l'origine.

Pertanto se $(x, y) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ (osservare che θ e' definito a meno di un multiplo intero di 2π) allora

$$x + \mathbf{i}y = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta).$$

Una notazione utile e'

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta,$$

e pertanto ogni numero complesso $x + \mathbf{i}y$ si puo' sempre esprimere in coordinate polari ed in forma compatta come segue:

$$x + \mathbf{i}y = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$$

dove θ definito a meno di $2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Inoltre si ha che

$$z^n = \rho^n e^{\mathbf{i}n\theta} \text{ se } z = \rho e^{\mathbf{i}\theta} \tag{5.1.0.10}$$

(vedi esercizio (5.1.0.8)).

Un numero complesso z' si dice essere una radice n-esima del numero complesso z se $z'^n = z$.

In particolare se $z = \rho e^{\mathbf{i}(\theta+2k\pi)}$ e $z' = \rho' e^{\mathbf{i}\theta'}$ e' una radice n-esima di z allora si ha per definizione che

$$\rho e^{\mathbf{i}(\theta+\mathbf{2k}\pi)} = (\rho')^n e^{\mathbf{i}n\theta'}$$

dove abbiamo usato (5.1.0.10).

In particolare si ha che le radici n-esime di $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ sono tutti e soli i numeri complessi del tipo $\rho' e^{\mathbf{i}\theta'}$ dove $\rho' = \sqrt[n]{\rho}$ e $\theta' = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

Esempio Calcolare $\sqrt{-1}$. Osserviamo che in base all'interpretazione geometrica dei numeri complessi si ha che $-1 = e^{\mathbf{i}(\pi+2k\pi)}$ con $k \in \mathbf{Z}$ e quindi tutte le radici di -1 sono del tipo $e^{\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Data la periodicita' di $e^{\mathbf{i}\theta}$ si ha che le uniche radici distinte di -1 possono essere individuate dai numeri $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$ e $e^{\mathbf{i}\pi\frac{3}{2}}$ che possono essere scritte in coordinate cartesiane come $\mathbf{i}$ e $-\mathbf{i}$.

Problema 5.1.0.1. *Provare che* $|z|^2 = z.\bar{z}$ *per ogni numero* $z \in \mathbf{C}$.

Problema 5.1.0.2. *Provare che* $|z \cdot w| = |z||w|$ *per ogni numero* $z, w \in \mathbf{C}$.

Problema 5.1.0.3. *Calcolare*

$$\frac{3i-2}{i-2} + \frac{i-3}{1-2i} + \frac{(1-i)(i-2)}{(2i+1)^2}.$$

Problema 5.1.0.4. *Dati i numeri complessi* $z = x + \mathbf{i}y$ *e* $w = x' + \mathbf{i}y'$ *(w si suppone diverso dal numero complesso nullo) esprimere la parte reale e la parte immaginaria di* $\frac{z}{w}$.

Problema 5.1.0.5. *Provare che*

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

per ogni coppiae di numeri $z, w \in \mathbf{C}$.

Problema 5.1.0.6. *Dato il numero complesso* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ *calcolare* $|z|^2$.

Problema 5.1.0.7. *Dati* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ *e* $z' = \rho' e^{\mathbf{i}\theta'}$ *esprimere in coordinate polari i numeri* $z.z'$ *e* $\frac{z}{z'}$.

Problema 5.1.0.8. *Esprimere in coordinate polari il numero* z^n *dove* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$.

Problema 5.1.0.9. *Calcolare*

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

per $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5.1.0.10. *Simplificare l'espressione*

$$\frac{z^3-1}{z-1} + \overline{\frac{z^3-1}{\overline{z-1}}}$$

dove $z = e^{i\theta}$.

Problema 5.1.0.11. *Calcolare*

$$z^4 + 1/z^4$$

se $z + 1/z = 1$.

Problema 5.1.0.12. *Provare che ogni numero complesso z diverso da zero, ammette esattamente n radici n-esime distinte.*

Problema 5.1.0.13. *Calcolare* $\sqrt[6]{\mathbf{i}}$, $\sqrt[5]{\sqrt{3}+\mathbf{i}}, \sqrt[3]{3+3\mathbf{i}}$.

Problema 5.1.0.14. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*

$$z^n = z.$$

Problema 5.1.0.15. *Risolver l'equazione* $\bar{z}^3 z^4 = -2z^2$.

Problema 5.1.0.16. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*

$$z^n = \bar{z}.$$

Problema 5.1.0.17. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*

$$z^2 - |\bar{z} - 3| - 3 = 0.$$

Suggerimento. Usare la forma cartesiana $z = x + iy$.

Problema 5.1.0.18. *Rislovere*

$$z - \overline{z} = z\overline{z} - (\mathrm{Im} z)^2 + (1 - 2\mathrm{i})^2 - 1.$$

Soluzione. Ponendo

$$y = \mathrm{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}, \ r = |z|,$$

abbiamo

$$z - \overline{z} = 2\mathrm{i}y, \quad z\overline{z} = r^2$$

e usando

$$(1 - 2\mathrm{i})^2 - 1 = -4 + 4\mathrm{i},$$

troviamo

$$2\mathrm{i}y = r^2 - y^2 - 4 + 4\mathrm{i}$$

e quindi la parte reale ed imaginaria in questa identitá ci da

$$2y = 4,$$

$$r^2 - y^2 = 4.$$

In questo modo troviamo

$$y = 2, r = 2\sqrt{2}.$$

□

Problema 5.1.0.19. *Trovare tutte le coppie di numeri complessi z, w tali che*

$$\bar{z}^2 - w^2 = -1,$$

$$\bar{w}^2 - z = 0.$$

Problema 5.1.0.20. *Esrpimere in coordinate polari il numero complesso*

$$1 + \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta.$$

Problema 5.1.0.21. *Rappresentare graficamnete il seguente sottoinsieme di* $\mathbf{C}$*:*

$$\{|z-1| = |z+1|, z \in \mathbf{C}\}.$$

Problema 5.1.0.22. *Siano* $z_1, ..., z_n$ *le radici* n*-esime di* 1*. Calcolare* $z_1 + ... + z_n$ *e* $z_1 \times ... \times z_n$*.*

Problema 5.1.0.23. *Scrivere in forma compatta i numeri* $(1+i)^n + (1-i)^n$*, con* $n \in \mathbb{N}$*.*

Problema 5.1.0.24. *Siano dati* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *tali che* $|a| = |b| = |c| = 1$*. Provare che il triangolo di vertici* a, b, c *e' equilatero se e solo se* $a + b + c = 0$*.*

Problema 5.1.0.25. *Siano dati* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *, provare che il triangolo di vertici* a, b, c *e'equilatero se e solo se* $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$*.*

Problema 5.1.0.26. *Rappresentare graficamenete il seguente sottoinsieme di* $\mathbf{C}$*:*

$$\{z + \bar{z} = |z|^2, z \in \mathbf{C}\}.$$

Problema 5.1.0.27. *Se* $w \in \mathbb{C}$ *é un numero complesso tale che* $|w| < 1$ *verificare l'affermazione*

$$|z| < 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}\,z}\right| < 1.$$

Chapter 6

Differenziabilitá

Definizione 6.0.1. *Sia f una funzione di una variabile definita su un dominio $D \subset \mathbb{R}$ e x_0 é un punto interno di D. La funzione é detta differenziabile in x_0 se esiste il limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = L(x_0)$$

ed in tal caso si ha:

$$L(x_0) = f'(x_0).$$

Lemma 6.0.0.1. *Sia f una funzione di una variabile definita su un dominio $D \subset \mathbb{R}$ e x_0 é un punto interno di D. La funzione é differenziabile se e solo se esiste un numero reale $L = L(x_0)$ tale che*

$$f(x) = f(x_0) + L(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Dimostrazione. Segue della Definizione 6.0.1 e del simbolo di Landau. □

Lemma 6.0.0.2. *Sia f una funzione di una variabile definita su un dominio $D \subset \mathbb{R}$ e x_0 é un punto interno di D. Se la funzione é differenziabile in $x_0 \in D$ allora é continua in x_0*

$$f(x) = f(x_0) + L(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Dimostrazione. Se la funzione é differenziabile nel x_0 allora

$$f(x) = f(x_0) + L(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|). \tag{6.0.0.1}$$

La continuitá significa

$$f(x) = f(x_0) + o(1).$$

Le proprieta

$$(x - x_0) \in o(1), o(|x - x_0|) \subset o(1)$$

dimostrano che (6.0.0.1) implica

$$f(x) = f(x_0) + o(1)$$

e quindi $f(x)$ é continua in x_0 □

Definizione 6.0.2. *Sia f una funzione di una variabile definita su un intervallo $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$ aperto. La funzione é differenziabile in D se e solo se f é differenziabile in ogni punto $x_0 \in D$.*

Regole di derivazione

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \ (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg}{dy}(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$(x^A)' = Ax^{A-1}, \ (\ln|x|)' = 1/x, \ (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \ (a^x)' = \mathrm{a}^x \ln a.$$

$$(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x, \ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

6.1 Teoremi di Roll, Lagrange e Cauchy

Teorema 6.1.1. *(teorema di Fermat sui punti stazionari)*
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione e si supponga che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di estremo locale di f. Se f é derivabile nel punto x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Proof. Si supponga che x_0 sia un punto di massimo locale (la dimostrazione si applica anche nel caso in cui x_0 sia un minimo). Allora:

$$\exists \delta > 0 \ : \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b) \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

Pertanto, per ogni $h \in (0, \delta)$ vale la relazione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Dato che il limite di questo rapporto per $h \to 0^+$ esiste ed é pari a $f'(x_0)$, allora si puó concludere (permanenza del segno) che $f'(x_0) \leq 0$. D'altra parte, per $h \in (-\delta, 0)$ si nota che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0;$$

di nuovo, il limite per $h \to 0^- vale f'(x_0)$, da cui abbiamo $f'(x_0) \geq 0$.
Combinando i risultati ottenuti si puó concludere che $f'(x_0) = 0$.
□

Teorema 6.1.2. *(teorema di Roll) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f é continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e se vale $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che*

$$f'(c) = 0.$$

Proof. In virtu' del Teorema di Weierstrass la funzione sull'intervallo $[a, b]$ ammette massimo e minimo assoluti (che indichiamo rispettivamente con M e m). Si danno due casi: o il massimo e il minimo sono entrambi raggiunti negli estremi oppure almeno uno dei due appartiene all'intervallo (a, b).

Il massimo e il minimo sono entrambi raggiunti negli estremi e quindi poiche' $f(a) = f(b)$ ne segue che $M = m$. Questo implica che la funzione é costante sull'intervallo $[a, b]$ e quindi la derivata é nulla in ciascun punto c dell'intervallo (a, b). Il massimo o il minimo sono raggiunti all'interno dell'intervallo. Per fissare le idee, consideriamo il caso in cui il massimo é raggiunto in un punto c dell'intervallo aperto (a, b), cioé $f(c) = M$.

Dunque per il Teorema di Fermat la derivata é nulla nel punto c. $\square$

Teorema 6.1.3. *(teorema di Lagrange) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste un punto*

$$c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Idea della dimostrazione. Ai fini della dimostrazione dobbiamo cercare una funzione a cui si possa applicare il teorema di Rolle. In particolare dobbiamo fare in modo che essa rispetti la terza ipotesi, non garantita dall'ipotesi di Lagrange Sia $g(x)$ la seguente funzione:

$$g(x) = f(x) - f(a) + \Lambda(x - a).$$

Se la funzione é derivabile in (a, b) e $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora $f(x)$ é crescente in (a, b)

$$a < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Teorema 6.1.4. *(teorema di Cauchy) Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che*

$$[g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c).$$

Idea della dimostrazione. Ai fini della dimostrazione dobbiamo cercare una funzione a cui si possa applicare il teorema di Rolle. In particolare dobbiamo fare in modo che essa rispetti la terza ipotesi, non garantita dall'ipotesi di Lagrange. Sia $g(b) - g(a) \neq 0$ e $F(x)$ la seguente funzione :

$$F(x) = f(x) - f(a) + \Lambda(g(x) - g(a)),$$

dove Λ é una costante da scegliere in modo tale che l'ipotesi di Lagrange sono soddisfatti.

6.1.1 Regola di l'Hôpital

Teorema 6.1.5. *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b), con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; siano $g(x)$ e $g'(x)$ diverse da 0 in ogni punto di tale intervallo, tranne al piu' in $c \in (a, b)$. Sia inoltre*

$$f(x), g(x) \underset{x \to c}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{oppure } f(x), g(x) \underset{x \to c}{\longrightarrow} \pm\infty$$

ed esista

$$L = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Allora

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Idea della dimostrazione. La dimostrazione standard fa uso del teorema di Cauchy ed é soggetta a variazioni a seconda che c e L siano finiti o infiniti, che f e g convergano a zero o ad infinito, e che i limiti in considerazione siano destri, sinistri o bilateri.

Problema 6.1.1.1. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - x)}{x^2}.$$

Problema 6.1.1.2. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin(\cos x) - \ln(2x/\pi)}{(2x - \pi)^2}.$$

Problema 6.1.1.3. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin^2 x) - x^2)}{x^4}.$$

Problema 6.1.1.4. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to 0_+} x^x.$$

Problema 6.1.1.5. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0_+} x^{x-1/(\log x)}.$$

Problema 6.1.1.6. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0_+} xe^{-1/x}.$$

Problema 6.1.1.7. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0_+} x^3e^{-1/x^2}.$$

Problema 6.1.1.8. *Verificare se per ogni $n \geq 1$ la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & se\ x > 0; \\ 0, & se\ x \leq 0. \end{cases} \tag{6.1.1.2}$$

é n volte differenziabile.

Definizione 6.1.1. *Dato l'intervallo (a, b) l'insieme $C^\infty(a, b)$ é definito come l'insieme di tutti funzuioni $f(x)$ definita nel intervallo (a, b) tale che per ogni numero naturale $n \geq 1$ la funzione é n volte derivabile in (a, b).*

Problema 6.1.1.9. *Sia*

$$g(x) = f(x)f(1-x), \tag{6.1.1.3}$$

dove $f(x)$ é la funzione definita in (6.1.1.2) *Vedere se valgono le seguenti proprietá:*

$$x \in (0,1) \Longrightarrow g(x) > 0, \tag{6.1.1.4}$$

$$x \notin (0,1) \Longrightarrow g(x) = 0, \tag{6.1.1.5}$$

$$g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{6.1.1.6}$$

Problema 6.1.1.10. *Verificare se $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, dove*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, & se\ |x| < 1; \\ 0, & se\ |x| \geq 1. \end{cases} \tag{6.1.1.7}$$

Problema 6.1.1.11. *Verificare se* $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, *dove*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-2x)(2-x)}, & \text{se } 1/2 < x < 2; \\ 0, & \text{se } x \notin (1/2, 2). \end{cases} \tag{6.1.1.8}$$

a) Studiare la convergenza delle serie

$$F_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{x}{2^k}\right), \quad F_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(x2^k\right)$$

al variare di $x > 0$,

b) Vedere che

$$x > 0 \Longrightarrow F_1(x) + F_2(x) > 0.$$

Problema 6.1.1.12. *Sia*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)+f(x/2)}{f(x/4)+f(x/2)+f(x)+f(2x)}, & \text{per } x > 0; \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \tag{6.1.1.9}$$

dove $f(x)$ *é la funzione del problema* (6.1.1.11). *Vedere se*

a) $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$,

b) $\operatorname{supp} g$ *definito come la chiusura dell'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 0\}$$

e' compatto,

c) $g(x) = 1$ *per* $1 \leq x \leq 2$.

Problema 6.1.1.13. *Costruire una funzione* $f(x)$ *tale che*

a) $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$,

b) $\operatorname{supp} f$ *definito come la chiusura dell'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$$

e' $[-2, 2]$,

c) $f(x) = 1$ *per* $|x| \leq 1$.

Definizione 6.1.2. *Una funzione $f(x)$ si chiama razionale se*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi primi tra loro.

Problema 6.1.1.14. *Sia*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

dove $P(x) = ax^n + \cdots$ con $a \neq 0$ e $Q(x) = bx^m + \cdots$ con $b \neq 0$. Vedere che

$$\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = \begin{cases} \infty, & \text{se } n > m; \\ 0, & \text{se } n < m; \\ \frac{|a|}{|b|}, & \text{se } n = m. \end{cases} \tag{6.1.1.10}$$

Problema 6.1.1.15. *Verificare che la funzione $f(x) = \ln|x|$ non é razionale.*

Problema 6.1.1.16. *Verificare che la funzione $f(x) = e^x$ non é razionale.*

Problema 6.1.1.17. *Verificare che la funzione $f(x) = \sin x$ non é razionale.*

6.2 Formula di Taylor e massimi e minimi

Teorema 6.2.1. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte nell'intervallo (a, b). Sia fissato un $x_0 \in (a,)]$. Allora, definito il polinomio di Taylor di grado n come*

$$\mathrm{P}_n(f, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

si ha che

$$f(x) = \mathrm{P}_n(f, x) + R_n(x),$$

ove $R_n(x) = o(|x - x_0|^n)$.

Proof. Sia $f : [x_0 - |h|, x_0 + |h|] \to \mathbb{R}$, con $h \neq 0$, derivabile n volte in x_0, vogliamo dimostrare che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n) \qquad \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h),$$

(dove usiamo la convenzione $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ per la "derivata di ordine zero" di f). Questo equivale a

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \left[f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \cdots - f^{(n)}(x_0) \frac{h^n}{n!} \right] = 0 \tag{6.2.0.11}$$

La dimostriamo per induzione. Per $n = 1$ la relazione é facilmente verificabile; infatti se esiste $f'(x_0)$ la relazione coincide con la condizione di differenziabilitá per una funzione di una variabile, ovvero:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

Supponiamola vera per $(n - 1)$ e dimostriamola per n . Il rapporto che compare nella (6.2.0.11) si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per $h \to 0$; osserviamo inoltre che sia il denominatore sia la sua derivata prima nh^{n-1} non assumono mai un valore nullo. Sono dunque soddisfatte le ipotesi per applicare il teorema di de l'Hôpital, e allora il limite nella (6.2.0.11) viene a coincidere con:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0) - f''(x_0)h - \cdots - f^{(n)}(x_0) \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}}{nh^{n-1}} \tag{6.2.0.12}$$

nel caso quest'ultimo limite esista. Nelle nostre ipotesi la funzione $f'(x)$, che e' definita in un intorno di x_0, é derivabile $(n - 1)$ volte in x_0 e quindi, ricordando che:

$$f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0) \quad \forall k, 1 \leq k \leq n$$

per l'ipotesi d'induzione (considerando la suddetta espressione come sviluppo di $g(x) = f'(x)$ troncato al termine $n-1$, per il quale sappiamo che tale espressione e' vera) segue che il limite nella (6.2.0.12) é zero, ossia (data l'eguaglianza dei limiti per la regola di de l'Hôpital):

$$f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h-\cdots-f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!}=\mathrm{o}(h^n)$$

il che dimostra il passo induttivo e conferma la tesi. □

Teorema 6.2.2. *(Taylor con resto nella forma di Lagrange) Se la funzione é derivabile $n+1$ volte in un intorno di x_0 esiste ξ compreso tra x_0 e x tale che*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Proof. Per semplicita' suppogniamo $x_0=0$, $x=h$.

Dimostriamo la tesi per induzione. Quando $n=0$ per il teorema di Lagrange abbiamo proprio

$$R_1(h)=f(h)-f(0)=f'(\xi)h$$

per qualche ξ tra 0 e h. Supponiamo di aver dimostrato la tesi per n e proviamola per $n+1$, consideriamo che

$$R'_{n+1}(f,h)=f'(h)-\mathrm{T}'_{n+1}(f,h)=f'(h)-\mathrm{T}_n(f',h)=R_n(f',h)$$

quindi ancora per il teorema di Cauchy applicato a $R_{n+1}(f,h)$ e $g(h)=h^{n+2}$ abbiamo

$$R_{n+1}(f,h)=R_{n+1}(f,h)-R_{n+1}(f,0)=\frac{(R_{n+1}(f,\xi))'}{(n+2)\xi^{n+1}}h^{n+2}=\frac{R_n(f',\xi)}{(n+2)\xi^{n+1}}h^{n+2}.$$

Per ipotesi induttiva

$$R_n(f',\xi)=\frac{f^{(n+2)}(\zeta(\xi))}{(n+1)!}\xi^{n+1}$$

e quindi abbiamo

$$R_{n+1}(f,h)=\frac{f^{(n+2)}(\zeta(\xi))}{(n+1)!}\xi^{n+1}=\frac{f^{n+2}(\zeta)}{(n+2)!}h^{n+2}.$$

per qualche ξ tra x_0 e x e qualche ζ tra x_0 e ξ, il che completa la prova. □

Formula di Taylor per varie funzioni

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(|x|^{2k+3}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + O(|x|^{2k+2}).$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(|x|^{n+1}).$$

6.2.1 Massimi e minimi relativi.

Nel caso di una funzione derivabile di una variabile reale la condizione necessaria, ma non sufficiente, affinche' un punto possa, eventualmente, essere di massimo o di minimo locale é data dal teorema di Fermat, in base al quale la derivata prima di una funzione deve annullarsi se calcolata in corrispondenza di un punto di massimo o minimo locale:

$$f'(x_0) = 0$$

Tale condizione permette di trovare un certo numero di punti $(x_0, x_1, ...)$ che si chiamano punti critici o stazionari. Naturalmente questa condizione vale per tutti i punti interni al dominio di derivabilitá, cioé nei punti interni di questo insieme, mentre negli estremi dell'insieme non é detto che la derivata esista e proprio per questo motivo la condizione vale per gli intervalli aperti.

Possiamo utilizzare la derivata prima per classificare i punti critici. Un punto x_0 é di massimo locale per f se nei suoi intorni destro e sinistro:

$$f'(x) = \begin{cases} \leq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \\ \geq 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases}$$

Viceversa e' di minimo locale se:

$$f'(x) = \begin{cases} \geq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \\ \leq 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases}$$

6.2.2 Condizione sufficiente con la derivata seconda

Alternativamente se la funzione ammette la derivata seconda in un punto, un punto e' di massimo o minimo relativo se la derivata prima della funzione si annulla (quindi x_0 é un punto stazionario) e la derivata seconda non si annulla. Piu' precisamente, posto che la derivata prima si annulli, se la derivata seconda risulta essere maggiore di 0, allora significa che la concavitá sará rivolta verso l'alto perció il punto é di minimo. Mentre se la derivata seconda é minore di zero, significa che la concavitá é rivolta verso il basso quindi si tratterá di un punto di massimo. Se invece la derivata seconda si annulla, nel caso in cui la derivata terza sia diversa da zero, avremo in quel punto un flesso a tangenza orizzontale ascendente o discendente e, per la definizione di flesso, la funzione cambierá concavitá in tale punto.

6.2.3 Funzioni convessi (concavi)

Definizione 6.2.1. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ a valori reali, con I sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}$, si dice convessa nel suo dominio I se:*

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \forall x, y \in I \quad \forall \lambda, \mu \in [0,1], \lambda + \mu = 1. \tag{6.2.3.13}$$

Se l'uguaglianza vale solo nel caso in cui $x = y$ oppure se $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, allora si parla di funzione strettamente convessa.

Nel caso particolare in cui f sia funzione di una sola variabile, detto $I = (a, b)$, é possibile utilizzare la seguente.

Lemma 6.2.3.1. *Se $f(x)$ é convessa nel intervallo (a, b) se e solo se*

$$F(x, y) < F(t, x), \quad \forall a < y < x < t < b \tag{6.2.3.14}$$

dove

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \ x \in (a, b) \backslash \{y\}.$$

Dimostrazione. Siano y e t due punti di A tali che $y < x < t$. Abbiamo l'identita'

$$x = \lambda t + \mu y, \lambda = \frac{x - y}{t - y}, \ \mu = \frac{t - x}{t - y}.$$

Da (6.2.3.13) segue che

$$(\lambda+\mu)f(x) < \mu f(y) + \lambda f(t)$$

e

$$\mu(f(y)-f(x)) > \lambda(f(x)-f(t)) \Longrightarrow (t-x)(f(y)-f(x)) > (x-y)(f(x)-f(t))$$

e quindi

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} > \frac{f(x)-f(y)}{x-y}. \tag{6.2.3.15}$$

□

Lemma 6.2.3.2. *Se $f(x)$ é convessa nel intervallo (a,b) allora*

$$F(t,y) < F(t,x), \quad \forall a < y < x < t < b \tag{6.2.3.16}$$

dove

$$F(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, \; x \in (a,b)\backslash\{y\}.$$

Dimostrazione. La disequazione

$$F(t,y) < F(t,x)$$

si puo rescrivere come

$$(t-y)(f(t)-f(y)) < (t-x)(f(t)-f(x))$$

oppure come

$$(t-y)(f(t)-f(x)) + (t-y)(f(x)-f(y)) < (t-x)(f(t)-f(x))$$

e quatsa ultima disequazione ed equivalente a (6.2.3.15). □

Lemma 6.2.3.3. *Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ é convessa, allora per ogni*

$$a_1 < b_1, a_1, b_1 \in (a,b)$$

si puo trovare una costante $C = C(a_1,b_1)$ tale che

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq C, \quad \forall x,y \in [a_1,b_1], y < x. \tag{6.2.3.17}$$

Dimostrazione. Sia

$$a_2 \in (a, a_1), b_2 \in (b_1, b).$$

Usando (6.2.3.14) troviamo

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < \frac{f(b_2) - f(x)}{b_2 - x},$$

e usando (6.2.3.16) troviamo

$$\frac{f(b_2) - f(x)}{b_2 - x} \leq \frac{f(b_2) - f(b_1)}{b_2 - b_1}.$$

Concludiamo

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < \frac{f(b_2) - f(b_1)}{b_2 - b_1} = C_1, \ \forall y < x \leq b_1.$$

In modo si mile troviamo

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2} = C_2, \ \forall y < x \leq b_1.$$

□

Lemma 6.2.3.4. *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é strettamente coonvessa allora per ogni $x_0 \in (a, b)$ esiste*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ed esiste

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Abbiamo inoltre

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$

6.2.4 Media pesata e funzioni convesse

Sia
$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$
una funzione convessa. Per ogni
$$x_1, x_2, \cdots x_n \in (a,b)$$
e per ogni numeri reali e positivi, tali che
$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in [0,1], \ \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1 \tag{6.2.4.18}$$
possiamo cosiderare la combinazione
$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$
chiamata media pesata.

Lemma 6.2.4.1. *Se*
$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$
é una funzione convessa, allora per ogni
$$x_1, x_2, \cdots x_n \in (a,b)$$
e per ogni
$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in [0,1],$$
che soddisfano
$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1$$
vale la disequazione
$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \mu_j f(x_j). \tag{6.2.4.19}$$

Dimostrazione. Possiamo applicare induzione rispetto n. Per $n = 2$ la disequazione (6.2.4.19) segue direttamente dalla definizione. Se vale per $n = k - 1$ allora per ogni

$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{k-1} \in [0, 1], \ \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j = 1 \tag{6.2.4.20}$$

sappiamo che vale la disequazione

$$f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j f(x_j). \tag{6.2.4.21}$$

Sia

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in [0, 1], \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \tag{6.2.4.22}$$

Per

$$\lambda = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j, \ \mu = \lambda_k$$

possiamo supporre $\lambda > 0$ e abbiamo

$$\lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \in [0, 1].$$

Cosi troviamo

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j\right) = f(\lambda X + \mu Y),$$

dove

$$X = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x_j}{\lambda}, \ Y = x_k.$$

Usando la convessitá di f troviamo

$$f(\lambda X + \mu Y) \leq \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

Usando (6.2.4.21) con

$$\mu_j = \frac{\lambda_j}{\lambda}$$

otteniamo

$$f(X) \leq \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j f(x_j)}{\lambda}$$

e possiamo concludere

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j f(x_j) + \mu f(Y) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x_j).$$

□

6.2.5 Proprieta' delle funzioni convessi e definizioni equivalenti in $\mathbb{R}$

Problema 6.2.5.1. *Una funzione f in I é convessa se e solo se il rapporto incrementale:*

$$R_f(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad x, y \in (a,b), x \neq y$$

é crescente in entrambe le variabili.

Il Problema 6.2.5.1 ha imporlanti conseguenze dai risultati relativi ai limiti delle funzioni monotone si ha che in ogni punto x_0 interno ad I esistono e sono finiti i limiti

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Di qui segue, in particolare, che per ogni punto x_0 interno ad I

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Possiamo quindi enunciare il seguente

Teorema 6.2.3. *Si dimostra inoltre che se una funzione é convessa in un intervallo I, allora é continua in I.*

.

In particolare, funzioni derivabili due volte sono convesse se e solo se

$$\forall x \in I \ : \ f''(x) \geq 0.$$

Chapter 7

Esercizi sulla differenziabilitá

7.1 Esercizi sulla derivata delle funzioni elementari

Problema 7.1.0.1. *Trovare la derivata di*

$$\sin(\cos x) - \ln(2x/\pi)$$

Problema 7.1.0.2. *Trovare la derivata di:*
a) $f(x) = \mathrm{e} + \cos(\arcsin(x+1))$,
b) $f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$,
c) $f(x) = \sqrt{\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}}$,
d) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.
e)

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)$$

f)

$$(\ln x)^2 \cos(1 + \ln x).$$

Problema 7.1.0.3. *Trovare la seconda derivata di:*
a) $x^2 \mathrm{e}^x$,
b) $x^2 \mathrm{e}^x \cos x$,

c) $\frac{x^2}{1-x^2}$,
d) $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$,
e) $\ln(\arcsin x)$.
f) $\arctan(x+2)$.

7.2 Esercizi sui teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Problema 7.2.0.1. *Se f non é continua su $[a,b]$, ma derivabile in (a,b) e se vale $f(a)=f(b)$, allora non vale il teorema di Rolle.*

Problema 7.2.0.2. *Se f non é derivabile su (a,b), ma f é continua in $[a,b]$ e se vale $f(a)=f(b)$, allora non vale il teorema di Rolle.*

Problema 7.2.0.3. *Sia $f(x)=x-\log(1+x)$.*
a) Studiare intervalli dove $f(x)$ é monotona ed intracciare il grafico approssimativo.
b) Vedere se

$$x>-1 \Longrightarrow f(x)\geq 0.$$

c) Risolvere l'equazione $f(x)=0$.

Problema 7.2.0.4. *Vedere se per $x\in[0,+\infty)$ abbiamo*

$$\sin x \leq x.$$

Problema 7.2.0.5. *Vedere se per $x\in[0,1)$ abbiamo*

$$\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}.$$

Problema 7.2.0.6. *Vedere se per $x\in[0,+\infty)$ la funzione*

$$\cos x+\frac{x^2}{2}$$

é monotona.

Problema 7.2.0.7. *Vedere se per $x \in (-1, 0]$ abbiamo*

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Problema 7.2.0.8. *Vedere quanti soluzioni ha l'equazione*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Problema 7.2.0.9. *Se $a > 0, \lambda > 1$ sono numeri reali dimostrare*

$$(1 + a)^\lambda > 1 + a\lambda.$$

7.3 Esercizi sulla formula di Taylor

7.3.1 Definizione di $o(H(x))$

Ricordiamo la definizione del insieme (classe di funzioni) $o(H(x))$ quando x tende a x_0.

Prima consideriamo il caso $-\infty < x_0 < \infty$.

Sia $H(x)$ una funzione continua tale che

$$H(x) \to 0, \text{ quando } x \to x_0 \tag{7.3.1.1}$$

e

$$H(x) \neq 0, \text{ quando } x \neq x_0 \text{ é vicino a } x_0 \tag{7.3.1.2}$$

Definizione 7.3.1. *$o(H(x))$ é l'insieme di TUTTI funzioni $\varphi(x)$ definiti e continui vicino a x_0 e tali che*

$$\frac{\varphi(x)}{H(x)} \to 0 \quad \textit{quando } x_0 \to 0. \tag{7.3.1.3}$$

Osservazione 7.3.1.1. *Se $\varphi(x) \in o(H(x))$ possiamo scrivere (per avere una scrittura abbreviata e semplificata)*

$$\varphi(x) = o(H(x))$$

ma significato rigoroso della identitá sopraindicata é

$$\varphi(x) \in o(H(x)).$$

Esempio 7.3.1.1. *Abbiamo*
$$x^3 \in o(x^2) \text{ quando } x \to 0,$$
perché
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$
Esempio 7.3.1.2. *Abbiamo*
$$x^2 \cos x \in o(|x|) \text{ quando } x \to 0,$$
perché
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{|x|} = 0.$$
Esempio 7.3.1.3. *NON é VERA la proprietá*
$$\sin(1/x) \in o(1) \text{ quando } x \to 0,$$
perché possiamo trovare punti
$$x_k = \frac{1}{(4k+1)\pi/2}, \quad k \in \mathbb{N}$$
tali che
$$\sin x_k = \sin((4k+1)\pi/2) = 1$$
e
$$x_k \to 0.$$
Questa osservazione significa che la proprieta
$$\lim_{x_k\to 0} \frac{\sin((4k+1)\pi/2)}{1} = 0$$
richiesta in (7.3.1.3) *NON é VERA.*

Abbiamo in generale le seguenti relazioni (quando $x \to x_0$ e $-\infty < x_0 < \infty$:
$$x^n \in o(|x|^m), \text{ quando } x \to 0 \text{ e } n > m, \tag{7.3.1.4}$$
$$o(|x|^p) + o(|x|^p) \subset o(|x|^p), \tag{7.3.1.5}$$
$$\lambda o(|x|^p) = o(|x|^p)\lambda \subset o(|x|^p), \ \lambda \text{ é costante in } \mathbb{R}, \tag{7.3.1.6}$$
$$o(|x|^p) \subset o(|x|^q), \text{ quando } x \to x_0 \text{ e } p \geq q \tag{7.3.1.7}$$
$$o(|x|^m)o(|x|^p) \subseteq o(|x|^{m+p}), \text{ quando } x \to x_0, \tag{7.3.1.8}$$
$$|x|^m o(|x|^p) = o(|x|^p)|x|^m \subseteq o(|x|^{m+p}), \text{ quando } x \to x_0\ , \tag{7.3.1.9}$$

7.3.2 Sviluppo di Taylor per il prodotto di due funzioni

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), \tag{7.3.2.10}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2), \tag{7.3.2.11}$$

qundo $x \sim 0$, possiamo calculare sviluppo di Taylor per il prodotto

$$f(x)g(x) = \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)\right)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2)\right)$$

usando le proprietá (7.3.1.4) - (7.3.1.9), troviamo

$$\begin{gathered}
f(x)g(x) = a_0\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2)\right) + \\
+a_1x\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2)\right) + \\
+a_2x^2\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2)\right) + \\
+o(x^2)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2)\right) = \\
= a_0b_0 + a_0b_1x + a_0b_2x^2 + a_0o(x^2) + \\
+a_1b_0x + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^3 + a_1xo(x^2) + \\
+a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + a_2b_2x^4 + a_2x^2o(x^2) + \\
+o(x^2)b_0 + o(x^2)b_1x + o(x^2)b_2x^2 + o(x^2)o(x^2) = \\
a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + o(x^2).
\end{gathered}$$

La conclusione

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) = {} & a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \\
& +(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + o(x^2)
\end{aligned} \tag{7.3.2.12}$$

Osservazione 7.3.2.1. *Nella ultima relazione si usa la convenzione*

$$F(x) = G(x) + o(H(x))$$

se e solo se

$$F(x) - G(x) \in o(H(x)).$$

Possiamo considerare il caso piu generale di prodotto di due polinomi

$$P(x) = P_n(x) = A_0 + A_1x + \cdots A_nx^n$$

e

$$Q(x) = Q_m(x) = B_0 + B_1x + \cdots B_mx^m.$$

$$P(x)Q(x) = D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_{n+m}x^{n+m}, \quad (7.3.2.13)$$

dove

$$D_0 = A_0B_0,$$

$$D_1 = A_0B_1 + A_1B_0,$$

$$D_2 = A_0B_1 + A_1B_1 + A_2B_2,$$

$$\cdots$$

$$D_k = \sum_{j+\ell=k, j\leq n, \ell\leq m} A_jB_\ell,$$

$$\cdots$$

$$D_{n+m} = A_nB_m.$$

Usando le relazioni (7.3.1.4) - (7.3.1.9) possiamo avere il prodotto di due sviluppi di Taylor del tipo

$$f(x) = P_n(x) + o(|x|^n) \quad (7.3.2.14)$$

e

$$g(x) = Q_n(x) + o(|x|^n), \quad (7.3.2.15)$$

dove $x \to 0$, e

$$P(x) = P_n(x) = A_0 + A_1x + \cdots A_nx^n$$

e

$$Q(x) = Q_n(x) = B_0 + B_1x + \cdots B_nx^n.$$

Ovviamnete i sviluppi di Taylor (7.3.2.14) e (7.3.2.15) sono fino allo stesso ordine n e quindi possiamo scrivere seguendo lo stesso procedimento fatto per (7.3.2.12)

$$\begin{gathered} f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \\ +(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + \\ +(a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots a_{k-2}b_2 + a_{k-1}b_1 + a_kb_0)x^k + \\ + \cdots + \\ +(a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots a_{n-2}b_2 + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n + o(|x|^n). \end{gathered} \tag{7.3.2.16}$$

7.3.3 Sviluppo in Taylor per la funzione composta

Spesso si usano due sviluppi di Taylor

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), \tag{7.3.3.17}$$

$$F(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + o(y^2), \tag{7.3.3.18}$$

qundo $x \sim 0$, $y \sim 0$ e si cerca lo sviluppo in Taylor per la funzione composta $F(f(x))$. Per garantire la picolezza di $y = f(x)$ quando x é vicino a 0, dobbiamo chiedere

$$a_0 = 0. \tag{7.3.3.19}$$

Se questa condizione non é soddisfatta, non possiamo utilizzare (7.3.3.18). Possiamo usare le relazioni (7.3.2.16) e troviamo

$$\begin{aligned} y^2 = f(x)^2 = \big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)\big)^2 = \\ a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + o(x^2) \\ = a_1^2x^2 + o(x^2). \end{aligned} \tag{7.3.3.20}$$

Cosi troviamo (con $y = f(x)$)

$$F(f(x)) = F(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + o(y^2) = \tag{7.3.3.21}$$

$$\begin{aligned} &= b_0 + b_1(a_1x + a_2x^2) + b_2(a_1^2x^2) + o(x^2) = \\ &= b_0 + b_1a_1x + (b_1a_2 + b_2a_1^2)x^2 + o(x^2). \end{aligned} \tag{7.3.3.22}$$

Per avere sviluppi in Taylor di ordine superiore usiamo la seguente formula per il prodotto di due polinomi

$$P(x) = P_n(x) = A_0 + A_1 x + \cdots A_n x^n$$

e

$$Q(x) = Q_m(x) = B_0 + B_1 x + \cdots B_m x^m.$$

$$P(x)Q(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots + D_{n+m} x^{n+m}, \quad (7.3.3.23)$$

dove

$$\begin{gathered} D_0 = A_0 B_0, \\ D_1 = A_0 B_1 + A_1 B_0, \\ D_2 = A_0 B_1 + A_1 B_1 + A_2 B_2, \\ \cdots \\ D_k = \sum_{j+\ell=k, j\leq n, \ell\leq m} A_j B_\ell, \\ \cdots \\ D_{n+m} = A_n B_m. \end{gathered}$$

Esempio 7.3.3.1. *Svilupando* $\sin x$ *fino ad ordine 5 abbiamo*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \quad (7.3.3.24)$$

e quindi

$$\sin x = P_5(x) + o(x^6).$$

In modo simile abbiamo lo sviluppo di Taylor di

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6).$$

Cosí abbiamo

$$\arctan x = Q_5(x) + o(x^6),$$

dove

$$Q_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$$

Usando le relazione (7.3.3.23), *troviamo*

$$P_5(x)Q_5(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) =$$

$$= x^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)x^4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{120} + \frac{1}{18}\right)x^6 + o(x^6).$$

Questi relazioni implicano

$$\sin x \arctan x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{19}{72}x^6 + o(x^6). \tag{7.3.3.25}$$

Esempio 7.3.3.2. *Svilupando* $\tan(x)$ *fino ad ordine 7. Abbiamo*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

e usiamo sviluppi di Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7), \tag{7.3.3.26}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7). \tag{7.3.3.27}$$

Prima cerchiamo sviluppo in Taylor di

$$\frac{1}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_7 x^7 + o(x^7).$$

Per trovare questo sviluppo usiamo le relazioni

$$1 = \cos x \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_7 x^7 + o(x^7)\right).$$

Utilizzando (7.3.3.18) *e confrontando i coefficienti davanti* $x^k, k = 0, \cdots, 7$ *troviamo*

$$1.a_0 = 1,$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0, \\
a_2 - \frac{a_0}{2} &= 0, \\
a_3 &= 0 \\
a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} &= 0, \\
a_5 &= 0, \\
a_6 - \frac{a_4}{2} + \frac{a_2}{24} - \frac{a_0}{720} &= 0, \\
a_7 &= 0.
\end{aligned}
$$

Cosi troviamo

$$a_0 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24},$$

$$a_6 = \frac{a_4}{2} - \frac{a_2}{24} + \frac{a_0}{720} = \frac{5}{48} - \frac{1}{48} + \frac{1}{720} = \frac{61}{720}$$

e quindi

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7).$$

Utilizzando (7.3.3.26) *troviamo il sviluppo di Taylor per il prodotto*

$$\tan x = \sin x \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7).$$

In conclusione abbiamo

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7) \qquad (7.3.3.28)$$

Problema 7.3.3.1. *Verificare lo sviluppo*

$$\cos(\tan x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} - \frac{97x^6}{720} + o(x^7). \qquad (7.3.3.29)$$

Soluzione. Usando (7.3.3.27) abbiamo

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{720} + o(y^7). \tag{7.3.3.30}$$

Usando (7.3.3.28)

$$y = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7),$$

$$y^2 = (\tan x)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{315} + o(x^7),$$

$$y^3 = x^3 + x^5 + \frac{11x^7}{15} + o(x^7),$$

$$y^4 = x^4 + \frac{4x^6}{3} + o(x^7),$$

$$y^5 = x^5 + \frac{5x^7}{3} + o(x^7),$$

$$y^6 = x^6 + o(x^7).$$

Sostituzione in (7.3.3.30) implica

$$\cos(\tan x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} - \frac{97x^6}{720} + o(x^7).$$

□

Problema 7.3.3.2. *Verificare lo sviluppo*

$$\tan x \cos(\tan x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{13x^5}{40} - \frac{137x^7}{560} + o(x^7).$$

Suggerimento. Utilizzare (7.3.3.29) e (7.3.3.28). □

Problema 7.3.3.3. *Verificare lo sviluppo*

$$\tan(x \cos x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{13x^5}{40} + \frac{11x^7}{1008} + o(x^7).$$

Problema 7.3.3.4. *Verificare lo sviluppo*

$$\tan(x\cos x) - \cos(x\tan x) = \frac{23x^7}{90} + o(x^7).$$

Suggerimento. Utilizzare Problemi 7.3.3.2 e 7.3.3.3. □

Problema 7.3.3.5. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(x^3/6) - x + \tan(\sin(x))}{bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1+bx^2}},$$

con $b \neq 0$.

Soluzione. Si studia

$$\lim_{x\to 0} \frac{(ax^2 - 1 + \cos(\sin(x))}{-2bx^2 + 3\sqrt{1+2bx^2} - 3\sqrt[3]{1+bx^2}}.$$

Abbiamo lo sviluppo asintotico

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \to 0,$$

$$\tan y = y + y^3/3 + (2y^5)/15 + o(|y|^5), \quad y \to 0$$

Con $y = \sin x$ abbiamo

$$\tan(\sin x) = x + x^3/6 - x^5/40 + o(|x|^5).$$

Le relazioni

$$\sqrt[3]{1+bx^2} = 1 + \frac{bx^2}{3} - \frac{b^2x^4}{9} + o(x^5),$$

implica

$$bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1+bx^2} = \frac{b^2x^5}{3} + o(x^5).$$

Cosi troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(x^3/6) - x + \tan(\sin(x))}{bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1+bx^2}} = -\frac{3}{40b^2}.$$

□

Osservazione. Spesso in alcuni soluzioni si puo trovare l'identitá

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(x^3/6) - x + \tan(\sin(x))}{bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1+bx^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-(x^3/6) - x + \tan(x)}{bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1+bx^2}}, \tag{7.3.3.31}$$

"giustificata" con la relazione

$$\sin x \sim x. \tag{7.3.3.32}$$

L'utilizzo del simbolo $\sim$ al posto di

$$\sin x = x + o(x) \tag{7.3.3.33}$$

spesso crea errori gravi nelle soluzioni. Bisogna usare sviluppi precisi, tipo (7.3.3.33) o

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^4), \tag{7.3.3.34}$$

oppure

$$\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^6),$$

dove serve.

Un controesempio tipico dove si puo ottenere risultato sbagliato usando (7.3.3.32) senza tenere conto del ordine del resto é

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x^3}.$$

Usando lo sviluppo (7.3.3.34) troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

"Usando" (7.3.3.32) nel modo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

ovviamente commettiamo errore grave.

$\square$

Problema 7.3.3.6. *Stabilire i coefficienti* a_0, a_1, a_2 *nello sviluppo assintotico*

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(|x|^2)$$

per $x \to 0$.

Suggerimento.

$$1+\sin x = 1 + x + o(x^2),\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e usando la relazione

$$1+\sin x = \cos x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

arriviamo alla conclusione

$$1 + x + o(x^2) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(|x|^2)\big) =$$

$$= a_0 + a_1 x - \frac{a_0 x^2}{2} + a_2 x^2 + o(x^2)$$

Cosí abbiamo

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}.$$

Problema 7.3.3.7. *Stabilire i coefficienti* a_0, a_1 *nello sviluppo assintotico*

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x + 1} = a_0 + a_1(x-\pi) + o(|x-\pi|^2)$$

per $x \to \pi$.

Problema 7.3.3.8. *Stabilire i coefficienti* a_0, a_1, a_2 *nello sviluppo assintotico*

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x + 1} = a_0 + a_1(x-\pi) + a_2(x-\pi)^2 + o((x-\pi)^2)$$

per $x \to \pi$.

Problema 7.3.3.9. *Stabilire i coefficienti* $a_0, a_1, \cdots, a_{20}$ *nello sviluppo assintotico*

$$\frac{1}{1+x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20} x^{20} + o\left(x^{20}\right)$$

per $x \to 0$.

Problema 7.3.3.10. *Calcolare* $f^{(20)}(0)$ *della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Problema 7.3.3.11. *Stabilire i coefficienti* $a_0, a_1, \cdots, a_{20}$ *nello sviluppo assintotico*

$$\frac{1}{1+x^2} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{20}}{x^{20}} + o\left(\frac{1}{x^{20}}\right)$$

per $x \to \pm\infty$.

Suggerimento Cambiamento di variabili $x = 1/y$ e sviluppo per $y \to 0_\pm$, usando il Problema 7.3.3.9.

Problema 7.3.3.12. *Usando il teorema di Taylor vedere che lo sviluppo asintotico*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

implica

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + o(x^n).$$

Problema 7.3.3.13. *Stabilire i coefficienti* $a_0, a_1, \cdots, a_{20}$ *nello sviluppo assintotico*

$$\arctan x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{20}}{x^{20}} + o\left(\frac{1}{x^{20}}\right)$$

per $x \to \infty$.

Problema 7.3.3.14. *Stabilire i coefficienti* a_0, a_1, a_2 *nello sviluppo assintotico*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

per $x \to \infty$.

7.4 Esercizi sullo studio delle funzioni

Problema 7.4.0.1. *Studiare la funzione*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.2. *Studiare la funzione*

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.3. *Studiare la funzione*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.4. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.5. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Problema 7.4.0.6. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.7. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{4x}{4 + x^2}$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.8. *Studiare la funzione*

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.9. *Studiare la funzione*

$$f(x) = -x + 1 + \ln\left(1 + \frac{5}{|x|}\right)$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.10. *Studiare la funzione*

$$f(x) = -2x + 3 + \ln\left(1 + \frac{3}{|x|}\right)$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.11. *Studiare la funzione*

$$f(x) = x + 2 + \ln\left(1 + \frac{2}{|x|}\right)$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.12. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}} - \sqrt{1+x}, \quad x \geq 2$$

é trovare

$$\sup f(x), \inf f(x)$$

se esitono.

Suggerimento. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{6}x^{-3/2} - \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}.$$

Possiamo verificare che

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \geq 1.$$

Infatti, dobbiamo verificare

$$3x(1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/2} - 3x^{3/2} > 0 \iff (3x-1)^2(1+x) > 9x^3 \iff$$

$$\iff 9x^3 - 6x^2 + x + 9x^2 - 6x + 1 > 9x^3$$

e quasta disequazione ed equaivalente a

$$3x^2 - 5x + 1 > 0$$

e questo é ovvio se $x > 2$. Cosi la funzione é crescente. Si puo vedere inoltre che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

cosi

$$\sup_{x\geq 2} f(x) = 0, \quad \inf_{x\geq 2} f(x) = f(2).$$

□

Problema 7.4.0.13. *Sia*

$$f(x) = g\left(|x - 1/x|^{1/k}\right), x > 0$$

dove $k > 1$, $g(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Studiare la differenziabilitá della funzione nel punto $x = 1$ e tracciare il grafico (senza la derivata seconda).

Soluzione. Sia $h(x) = |x - 1/x|^a$, dove $a \in (0, 1/2)$. Abbiamo la relazione

$$f(x) = g(H(x)), \quad H(x) = |x - 1/x|^a$$

e

$$f'_-(1) = \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{g(H(1+h)) - g(0)}{h}.$$

Abbiamo inoltre

$$g(y) = g(0) + g'(1)y + \frac{g''(0)y^2}{2} + o(y^2$$

per $y \to 0$. Usando

$$g'(x) = (e^x - e^{-x})/2, \quad g''(x) = (e^x + e^{-x})/2$$

troviamo

$$g(y) = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

e quindi

$$\frac{g(H(1+h)) - g(0)}{h} = \frac{H(1+h)^2}{2h} = \frac{\left(\frac{1}{1+h} - 1 - h\right)^{2a}}{h}.$$

L'ipotesi $a < 1/2$ e $h < 0$ implica

$$f'_-(1) = -\infty.$$

La funzione non é differenziabile in $x = 1$.

Possiamo tracciare il grafico.

$$f'(x) = g'(H(x))a\left(x - \frac{1}{x}\right)^{a-1}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) > 0 \text{ se } x > 1$$

e

$$f'(x) = -g'(h(x))a\left(\frac{1}{x} - x\right)^{a-1}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) < 0 \text{ se } 0 < x < 1.$$

L'unico punto critico (la soluzione di $f'(x) = 0$) é $x_0 = e^{-1/a}$. Per $x > x_0$ la funzione é crescente, mentre per $0 < x < x_0$ é decrescente. La figura 7.1 rappresenta il grafico di $f(x)$.

□

Osservazione. Spesso nelle soluzioni dei compitini si trova l'identitá

$$(|x|^a)' = a|x|^{a-1}$$

dove $a \neq 0$. Questa formula non é vera per ogni $x \neq 0$. La formula vera é

$$(|x|^a)' = a|x|^{a-2}x, \quad \forall x \neq 0. \qquad (7.4.0.35)$$

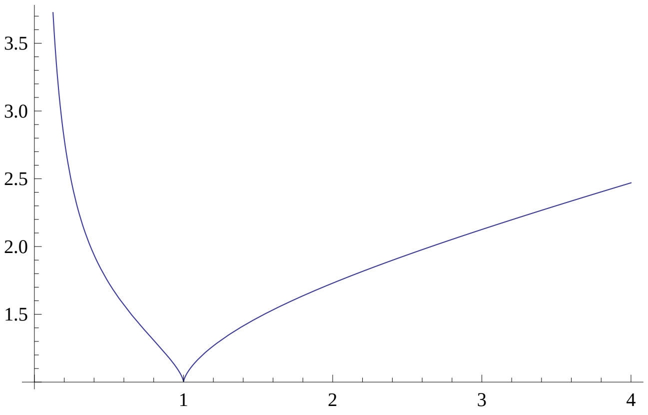

Figure 7.1: Grafico di $f(x)$.

o

$$(|x|^a)' = a\ \mathrm{sgn}(x)\ |x|^{a-1}x, \quad \forall x \neq 0, \tag{7.4.0.36}$$

dove

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ -1, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Cosí abbiamo

$$\left(\left|x - \frac{1}{x}\right|^a\right)' = a\left|x - \frac{1}{x}\right|^{a-2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. $\square$

Problema 7.4.0.14. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{|x-9|}$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.15. *Studiare (senza calcolare la derivata seconda) la funzione*

$$f(x) = \cos x \cos 2x.$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.16. *Studiare (senza calcolare la derivata seconda) la funzione*

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.17. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.18. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{2} + \arctan x$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.19. *Studiare la funzione*

$$f(x) = \arctan(2x) - \arctan x$$

e tracciare un grafico approssimativo.

Problema 7.4.0.20. *Trovare tutti funzioni $f(x)$ tali che $f(x)$ e' una funzione differnziabile in $\mathbb{R}$ e*

$$f'(x) = |x|.$$

Problema 7.4.0.21. *Trovare i coefficienti della funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{4} + mx^2 + n|x| + 2$$

se la funzione ha minimo

$$\min f(x) = -2$$

nel punto $x = 2$. Intracciare il grafico della funzione $f(x)$.

Problema 7.4.0.22. *Trovare tutti gli A tali che l'equazione*

$$5\sin x + 2\cos x = A$$

ha soluzione.

Risp. $-\sqrt{29} \leq A \leq \sqrt{29}$.

Problema 7.4.0.23. *Sia $M \geq 1$ intero e sia $X(M)$ l'insieme*

$$X(M) = \{x \in (-M, M); \{x\} = \frac{2}{\pi} \arctan x\},$$

dove $b(x) = \{x\}$ é la parte frazionaria di x cioé'

$$0 \leq b(x) < 1, \ x - b(x) \in \mathbb{Z}.$$

Studiare l'esistenza dell'limite

$$\lim_{M \nearrow \infty} \frac{card(X(M))}{M}.$$

Soluzione. Se $M \geq 1$ é un numero intero si puo vedereche (tracciando i grafici delle funzioni $b(x)$, $f_1(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$

$$\leq card(X(M)) = (M-1).$$

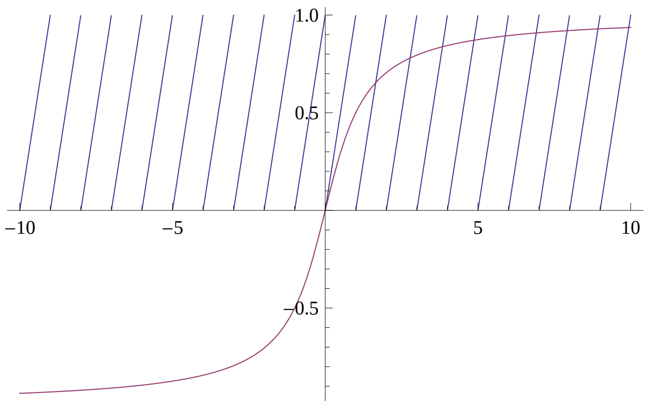

Figure 7.2: Il grafico di $f_1(x)$

Cosi otteniamo

$$\frac{card(X(M))}{M} \to 1.$$

$\square$

Problema 7.4.0.24. *Tracciare il grafico della funzione*

$$\int_0^x \frac{\sin t}{(t+1)} dt$$

per $x \in (0, \infty)$.

Soluzione. Abbiamo l'identita'

$$f'(x) = \frac{\sin x}{1+x}.$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Abbiamo inoltre

$$\lim_{x \searrow 0} f(x)$$

esiste ed e un numero positivo (il problema (9.2.5.10)) Il grafico e' tracciato sulla Figura 7.3

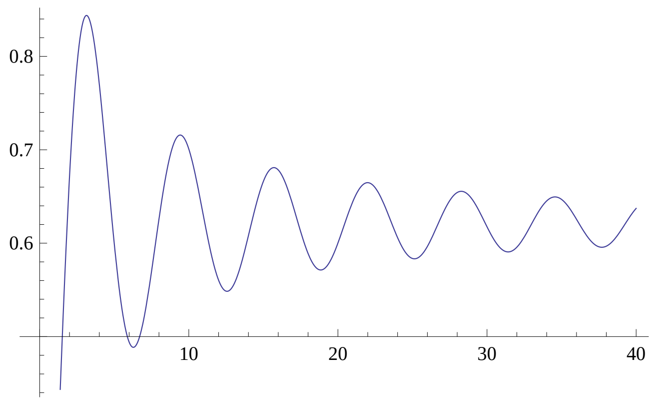

Figure 7.3: Il grafico di $f(x)$

$\square$

Problema 7.4.0.25. *Trovare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x) = 24x - \cos(12x) - 3\sin(8x)$$

per $x \in [-\pi/6, \pi/6]$.

Risp. $f_{max} = 4\pi - 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f_{min} = -4\pi - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Problema 7.4.0.26. *Trovare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x) = 18x - \sin(9x) + 3\sin(6x)$$

per $x \in [-7\pi/18, \pi/18]$.

Risp. $f_{max} = \pi - 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f_{min} = -7\pi - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Problema 7.4.0.27. *Trovare tutti i punti* $x \in \mathbb{R}$ *tali che* $f'(x) = 0$, *dove*

$$f(x) = \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{2\sin(3x)}{3} + \sin x.$$

Intracciare il grafico di f.

Risp. $x = \pi(2k+1), \; k \in \mathbb{Z}$.

Problema 7.4.0.28. *Trovare tutti i punti* $x \in \mathbb{R}$ *tali che* $f'(x) = 0$, *dove*

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(2x)}{2} - \sin x.$$

Intracciare il grafico di f.

Risp. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \; k \in \mathbb{Z}$.

Problema 7.4.0.29. *Trovare il minimo della funzione*

$$f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x.$$

ha soluzione.

Risp. $f_{min} = 12\pi - 1$.

Chapter 8

Integrale indefinito di Riemann in $\mathbb{R}$.

8.1 Integrale indefinito

Sia f una funzione definita in (a, b) con valori in $\mathbb{R}$.

Definizione 8.1.0.1. *La funzione $F(x)$ definita e differenziabile in (a, b) é primitiva di $f(x)$ nel intervallo (a, b) se e solo se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.*

Indichiamo con $\int f(x)dx$ (integrale indefinito di f) l'insieme delle funzioni primitive di f ovvero

$$\int f(x)dx = \{F(x) \text{ é differenziabile in } (a, b) \text{ e } F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)\}.$$

In generale si puo chiedere se l'insieme $\int f(x)dx$ non é vuoto. Infatti per certi funzioni $f(x)$ esiste alemeno una primitiva F

Esempio 8.1.0.1. *Usando le tabelle delle derivate delle funzioni elementari possiamo vedere che*

$$(x^A)' = Ax^{A-1} \implies \frac{x^A}{A} \in \int x^{A-1}dx, \forall A \neq 0,$$

$$(\ln|x|)' = 1/x \implies \ln|x| \in \int \frac{1}{x}dx,$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \Longrightarrow e^x \in \int e^x dx.$$

La caratterizzazione dell'insieme $\int f(x)dx$ é basato sulla segunete proprietá ottenuta come conseguenza del teorema di Lagrange.

Lemma 8.1.0.1. *Se $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ é una funzione differenziabile e $G'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora la funzione $G(x)$ é costante.*

Dimostrazione. Se $x_1 < x_2$ so due punti dell'intervallo (a,b), allora il teorema di Lagrange ci da

$$G(x_2) - G(x_1) = G'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

e l'ipotesi $G'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$ implica $G'(\xi) = 0$ e quindi

$$G(x_1) = G(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b).$$

□

Se $\int f(x)dx$ non é vuoto e $F_0(x) \in \int f(x)dx$ possiamo verificare che

Lemma 8.1.0.2.

$$\int f(x)dx = \{F_0 + C; C \text{ é costante}\}. \tag{8.1.0.1}$$

Dimostrazione. Se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$ allora $F(x) + C$ è anche una primitiva di f. Questa osservazione dimostra

$$\{F_0 + C; C \text{ é costante}\} \subset \int f(x)dx.$$

Per dimostrare l'inclusione opposta

$$\int f(x)dx \subset \{F_0 + C; C \text{ é costante}\}$$

si puo prendere una qualsiasi primitiva F di f e per $G = F - F_0$ si vede che

$$G'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Applicando Lemma 8.1.0.1 possiamo concludere la dimostrazione. □

Il Lemma precedente ci permette di scrivere l'identitá

$$\underbrace{\int f(x)dx}_{\text{é un insieme}} = \underbrace{F_0 + C}_{\text{é sottointeso l'insieme a destra in (8.1.0.1)}} \tag{8.1.0.2}$$

8.1.1 Regole dell'integrazione.

Visto che la definizione 8.1.0.1 significa che l'integrale indefinito $\int f(x)dx$ é un insieme, possiamo usare la seguente regole per operazione tra insiemi. Se A e B sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora poniamo

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}. \tag{8.1.1.3}$$

In modo simile se A é un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e λ é un numero reale, allora poniamo

$$\lambda A = \{\lambda a; a \in A\}. \tag{8.1.1.4}$$

Lemma 8.1.1.1. *Se $\int f(x)dx$ e $\int g(x)dx$ sono insiemi non vuoti, allora*

$$\int f(x) + g(x)dx \neq \emptyset$$

e

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{8.1.1.5}$$

Dimostrazione. Se

$$F_0(x) \in \int f(x)dx, \quad G_0(x) \in \int g(x)dx,$$

ovviamente

$$F_0'(x) + G_0'(x) = f(x) + g(x)$$

e quindi

$$F_0 + G_0 \in \int f(x) + g(x)dx.$$

□

Lemma 8.1.1.2. *Se $\int f(x)dx$ e un insieme non vuoto e α é un numero reale, allora*

$$\int \alpha f(x)dx \neq \emptyset$$

e

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx. \tag{8.1.1.6}$$

Dimostrazione. Se

$$F_0(x) \in \int f(x)dx,$$

e α é un numero reale ovviamente

$$(\alpha F_0(x))' = \alpha f(x)$$

e quindi

$$\alpha F_0 \in \int \alpha f(x)dx.$$

□

Lemma 8.1.1.3 (Integrazione per parti)**.** *Se $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ sono due funzioni differenziabili e*

$$\int f'(x)g(x)dx$$

é un insieme non vuoto, allora

$$\int f(x)g'(x)dx \neq \emptyset$$

e

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C. \tag{8.1.1.7}$$

Dimostrazione. Se

$$\Phi(x) \in \int f'(x)g(x)dx,$$

ovviamente

$$(f(x)g(x))' - \Phi'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$$

e quindi

$$f(x)g(x) - \Phi(x) \in \int f(x)g'(x)dx.$$

□

8.1.2 Cambiammento di variabili

Se

$$\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$$

é una funzione differenziabile, allora possiamo definire il differenziale $d\varphi$ di $\varphi(x)$ come segue

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx.$$

Se $I = (a, b)$ é un intervallo aperto, $J = (c, d)$ ed un altro intervallo aperto e

$$\varphi : I \to J$$

$$f : y \in J \to f(y) \in \mathbb{R}$$

sono due funzioni, allora possiamo definire la composizione (nota anche come "pull-back")

$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)).$$

Se

$$f : y \in J \to f(y) \in \mathbb{R}$$

é una funzione tale che

$$\int f(y)dy \neq \emptyset,$$

allora poniamo

$$\varphi^* \left(\int f(y)dy \right)(x) = \left\{ F(\varphi(x)); F(y) \in \int f(y)dy \right\}.$$

Spesso per semplificare le notazioni useremo anche la notazione

$$\int f(y)dy \Big|_{y=\varphi(x)}$$

al posto di

$$\varphi^* \left(\int f(y)dy \right)(x).$$

Lemma 8.1.2.1 (Formula di cambiamento di variabili)**.** *Se*

$$\varphi : I \to J$$

é una funzione differenziabile e

$$f : y \in J \to f(y) \in \mathbb{R}$$

é una funzione tale che

$$\int f(y)dy \neq \emptyset,$$

allora abbiamo le segunte relazioni

$$\int \varphi^*(f)(x)\varphi'(x)dx \neq \emptyset \tag{8.1.2.8}$$

e

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \varphi^* \left(\int f(y)dy \right)(x). \tag{8.1.2.9}$$

o

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy \Big|_{y=\varphi(x)}.$$

Dimostrazione. Se

$$F(y) \in \int g(y)dy,$$

allora F é differenziabile e

$$F'(y) = f(y).$$

Poniamo

$$G(x) = \underbrace{F(\varphi(x))}_{=\varphi^*(F)(x)}.$$

Abbiamo

$$G'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

e quindi

$$G(x) \in \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

$\square$

8.1.3 Tabella delle primitive

Funzione	Primitiva	Vincoli
x^a	$x^{a+1}/(a+1)\ +C$	$a \neq -1, a \in \mathbb{R}$, C é costante
x^{-1}	$\log\lvert x\rvert + C$	C é costante .
$\sin x$	$-(\cos x) + C$	C é costante .
$\cos x$	$(\sin x) + C$	C é costante .
e^x	$e^x + C$	C é costante .
a^x	$a^x/(\log a) + C$	$a > 0$, e C é costante .
$1/\cos^2 x$	$(\tan x) + C$	$\tan x = (\sin x)/(\cos x)$, C é costante .
$1/\sin^2 x$	$(-\cot x) + C$	$\cot x = (\cos x)/(\sin x)$, C é costante .
$1/\sqrt{1-x^2}$	$(\arcsin x) + C$	C é costante .
$1/\sqrt{k^2-x^2}$	$(\arcsin(x/k)) + C$	$k > 0$, C é costante .
$1/\sqrt{1+x^2}$	$(\log\lvert x+\sqrt{1+x^2}\rvert) + C$	C é costante .
$1/\sqrt{k^2+x^2}$	$(\log\lvert x+\sqrt{k+x^2}\rvert) + C$	$k \neq 0$, C é costante .
$1/(1+x^2)$	$\arctan x + C$	$k \neq 0$, C é costante .
$1/(k^2+x^2)$	$k^{-1}\arctan(x/k) + C$	$k \neq 0$, C é costante .
$1/(k^2+(ax+b)^2)$	$(ak)^{-1}\arctan((ax+b)/k) + C$	$k \neq 0$, C é costante .

Quindi abbiamo le relazioni:

$$\int x^A dx = \frac{x^{A+1}}{A+1} + C, A \neq -1,$$
$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln\lvert x+a\rvert + C,$$
$$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C,$$
$$\int \mathrm{a}^x dx = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$
$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C,$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

La sostituzione universale $u = \tan x/2$, soddisfa

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ dx = \frac{2}{1+u^2}du.$$

Problema 8.1.3.1. *Calcolare*

$$(\mathbf{a}) \int \frac{1}{\sqrt[n]{x}}dx,\ (\mathbf{b}) \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}dx,\quad (\mathbf{c}) \int 3^x \mathrm{e}^x dx$$
$$(\mathbf{d}) \int \frac{\cos^2 x + \sqrt{1-x^2}\cos^2 x \sin x - \sqrt{1-x^2}}{\cos^2 x\sqrt{1-x^2}}dx$$

8.2 Esercizi sull'integrale indefinito

8.2.1 Esercizi sull'integrazione per parti

Problema 8.2.1.1. *Calcolare*

$$\int \sin^2 x\, dx$$

Risposta.
Applichiamo la *formula di integrazione per parti* dopo aver scritto l'integrale assegnato nel modo che segue

$$\int \sin^2 x \ dx = \int \sin x \ \ \sin x \ dx.$$

Poniamo $g(x) = \sin x$ e $f'(x) = \sin x$, quindi $g'(x) = \cos x$ e $f(x) = -\cos x$. Sostituendo

$$\begin{aligned}\int \sin x \ \ \sin x \ dx \quad &= -\cos x \ \sin x - \textstyle\int -\cos^2 x \, dx = \\ &= -\cos x \ \sin x + \textstyle\int \cos^2 x dx = \\ &= -\cos x \ \sin x + \textstyle\int (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= -\cos x \ \sin x + x + C - \textstyle\int \sin^2 x dx\end{aligned}$$

ovvero

$$\int \sin^2 x dx = -\cos x \ \sin x + x + C - \int \sin^2 x dx$$

Portando al primo membro l'integrale

$$2 \int \sin^2 x dx = -\cos x \ \sin x + x + C$$

da cui

$$\int \sin^2 x dx = \frac{-\cos x \ \sin x + x}{2} + C$$

Allo stesso risultato si arriva mediante le *formule di bisezione*:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \ dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Problema 8.2.1.2. *Calcolare*

$$\int x \ \sin x \, dx$$

Risposta
Procediamo mediante l'integrazione per parti ponendo $g(x) = x$ e $f'(x) = \sin x$, quindi $f(x) = -\cos x$:

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Problema 8.2.1.3. *Calcolare*

$$\int e^x \sin x \, dx$$

Risposta. Applichiamo la formula di integrazione per parti ponendo $g(x) = \sin x$ e $f'(x) = e^x$:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Portando al primo membro l'ultimo integrale e dividendo per 2 :

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C$$

Problema 8.2.1.4. *Calcolare*

$$\int \sin mx \cos nx \, dx$$

Risposta. Si può integrare per parti prendento ad esempio $g(x) = \sin mx$ e $f'(x) = \cos nx$, oppure si possono utilizzare le *formule di Werner*:

$$\int \sin mx \cos nx \, dx = \int \frac{1}{2} \left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right] \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\cos(m-n)x}{m-n} - \frac{1}{2} \frac{\cos(m+n)x}{m+n} + C$$

Problema 8.2.1.5. *Calcolare*

$$\int x \cos x \, e^x \, dx$$

Risposta. Procediamo integrando per parti. Poniamo $g(x) = x\ \cos x$ e $f'(x) = e^x$

$$\int x\ \cos x\ e^x\, dx = x\ \cos x\ e^x - \int \cos x\ e^x dx - \int x \sin x\ e^x dx \tag{8.2.1.10}$$

Consideriamo l'ultimo integrale

$$\int x \sin x\ e^x\, dx = x\ \sin x\ e^x - \int \sin x\ e^x\ dx\ - \int x \cos x e^x\, dx \tag{8.2.1.11}$$

Da (8.2.1.10) e (8.2.1.11) otteniamo

$$2 \int x \cos x\ e^x\, dx\ \ =\ \ x\, e^x\, (\sin x + \cos x) - \int \cos x\ e^x\, dx - \int \sin x\ e^x\, dx.$$

Si ritorna così agli integrali visti sopra.
OSSERVAZIONE
Anche nel caso che si voglia calcolare

$$\int P_n(x)\ e^x\ dx$$

(dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n in x) si può procedere per parti. Esiste comunque un metodo alternativo che permette di semplificare la risoluzione di integrali di questo tipo o del tipo

$$\int P_n(x)\ sinx\ dx, \qquad \int P_n(x)\ \cos x\ dx,$$

si tratta del **metodo dei coefficienti indeterminati.** Illustrimo questo metodo con un esempio.

Problema 8.2.1.6. *Calcolare*

$$\int e^x\, (5x^2 + x - 3)\, dx$$

Risposta.
Cerchiamo primitive del tipo $(Ax^2 + Bx + C)e^x$, ovvero determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\int e^x\, (5x^2 + x - 3)\, dx = (Ax^2 + Bx + C)e^x + C_1,$$

che equivale a

$$\frac{d}{dx}[(Ax^2 + Bx + C)e^x] = e^x\,(5x^2 + x - 3)$$

Effettuando la derivazione otteniamo l'identità:

$$Ax^2 + (2A + B)x + B + C = 5x^2 - x - 3$$

e quindi il sistema

$$\begin{cases} A & = & 5 \\ (2A + B) & = & -1 \\ B + C & = & -3 \end{cases}$$

Da cui $A = 5$, $B = -9$, $C = 6$.

Problema 8.2.1.7. *Calcolare*

$$\int (x^2 + x)\ \sin x\, dx$$

Risposta.
Procediamo in modo analogo all'esercizio precedente determinando $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tali che

$$\int (x^2 + x)\ \sin x\, dx = (Ax^2 + Bx + C)\ \sin x + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cos x + k.$$

Usando il *metodo di integrazione per parti*, calcolare

(1) $\int \log x dx$	(2) $\int \arctan x dx$	(3) $\int x^\alpha \log x dx$
(4) $\int \log^2 x dx$	(5) $\int x^2 \log^2 x dx$	(6) $\int x \arctan x dx$
(7) $\int x^2 \arctan x dx$	(8) $\int x\mathrm{e}^x dx$	(9) $\int x \cos x dx$
(10) $\int x^2 \cos x dx$	(11) $\int \arcsin x dx$	(12) $\int x\mathrm{e}^x \sin x dx$
(13) $\int\ \sin mx\ \sin nx\, dx$	(14) $\int\ \cos mx\ \cos nx\, dx$	

8.2.2 Integrali di funzioni razionali

Si deve calcolare l'integrale $\int f(x)dx$, dove $f(x) = P(x)/Q(x)$, e $P(x), Q(x)$ sono polinomi in x.

I caso:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, n > 1$$

In questo caso abbiamo

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{-n+1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

II caso:

$$\int \frac{1}{(x-a)} dx,$$

In questo caso abbiamo

$$\int \frac{1}{(x-a)} dx = \log|x-a| + C.$$

III Caso:

$$\int \frac{1}{x^2+ax+b} dx,$$

a) se $x^2 + ax + b$ ha radice reale α con molteplicità 2 :

$$\int \frac{1}{x^2+ax+b} dx = \int \frac{1}{(x-\alpha)^2} dx = -\frac{1}{(x-\alpha)} + C,$$

b) se $x^2 + ax + b$ ha due radici reali $\alpha \neq \beta$, allora

$$\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha} \left(\frac{1}{x-\beta} - \frac{1}{x-\alpha} \right).$$

c) se $x^2 + ax + b$ ha due radici complesse

$$\alpha = p + iq, \ \overline{\alpha} = p - iq,$$

allora

$$\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x-p)^2+q^2}.$$

IV caso:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}dx$$

In questo caso abbiamo

$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b} = \frac{A}{2}\frac{2x+2B/A}{x^2+ax+b}$$

$$= \frac{A}{2}\frac{2x+a}{x^2+ax+b} + \frac{A}{2}\frac{2B/A-a}{x^2+ax+b}.$$

e possiamo usare il metodo del caso precedente.

V caso:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

dove grad$P \geq$ grad$Q$. In questo caso abbiamo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dove grad$R <$ grad$Q$.

8.2.3 Il metodo di Hermite

Iniziamo con alcuni esempi.

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int x\frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{1}{2(1+x^2)}dx \tag{8.2.3.12}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{1}{2(1+x^2)}dx. \tag{8.2.3.13}$$

Si possano verificare inoltre le relazioni

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^m}dx = \frac{1}{2}\int x\frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^m} = -\frac{x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} +$$

$$+\int \frac{1}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}}dx$$

e

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^m}dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^m}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^m}dx = \frac{x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} +$$
$$+ \int \frac{2m-3}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}}dx.$$

Cosí per ogni $m \geq 2$ abbiamo

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^m}dx = \frac{x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} + \int \frac{2m-3}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}}dx. \tag{8.2.3.14}$$

Se $Q(x)$ é polinomio con grad$Q = N \geq 1$, allora abbiamo.

Lemma 8.2.3.1. *Se $Q(x)$ é polinomio con* grad$Q = N \geq 1$, *allora*

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{n} q_j(x)^{a_j}, \ \ a_j \geq 1,$$

dove $q_j(x)$ sono polinomi primi tra loro tali che loro sono lineari o polinomi quadratici irreducibili.

Proof. Siano

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h,$$

radici reali di Q con molteplicitá $m_1, m_2, \cdots, m_h$. Siano

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k,$$

e

$$\overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}, \cdots, \overline{\beta_k},$$

radici complesse di $Q(x)$ con molteplicitá $\mu_1, \cdots, \mu_k$. Posto

$$\beta_j = p_j + iq_j, \quad j = 1, \cdots, k$$

abbiamo

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_h)^{m_h} (x-\beta_1)^{\mu_1} \cdots (x-\beta_k)^{\mu_k} (x-\overline{\beta_1})^{\mu_1} \cdots (x-\overline{\beta_k})^{\mu_k}.$$

L'identitá
$$(x-\beta_j)(x-\overline{\beta_j}) = (x-p_j)^2 + q_j^2$$
implica
$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_h)^{m_h}((x-p_1)^2+q_1^2)^{\mu_1}\cdots((x-p_k)^2+q_k^2)^{\mu_k}.$$
□

Dobbiamo studiare
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$
dove grad$P <$ grad$Q$.

Il metodo di Hermite - Ostrogradski é basato sulla furmula.

Lemma 8.2.3.2. *(vedi [**?**])*
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{8.2.3.15}$$
dove
$$Q_1(x) = \prod_{j=1}^n q_j(x)^{(a_j-1)}, \quad Q_2(x) = \prod_{j=1}^n q_j(x).$$

Proof. Se $Q(x) = (x-c)^m$ e
$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-c)^k$$
allora l'identitá (8.2.3.15) si puo dedurre come segue
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \sum_{j=-m}^{n-m} a_{j+m}\int (x-c)^j =$$
$$= \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + a_{m-1}\int \frac{1}{x-c}dx.$$

Se $Q(x) = (x^2+ax+b)^m$, $P(x) = R(x)Q_2(x) + S(x)$ con $S(x)$ lineare, allora
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{R(x)}{Q_2(x)^{m-1}}dx + \int \frac{S(x)}{Q_2(x)^m}dx$$

e possiamo verificare la tesi solo per

$$\int \frac{S(x)}{Q_2(x)^m}.$$

Se $S(x) = Ax + B$, e $m = 1$ allora l'identitá (8.2.3.15) vale con $P_1(x) = 0$.

Se $S(x) = Ax + B$, e $m \geq 2$ allora (8.2.3.14) implica

$$\int \frac{1}{Q_2(x)^m} dx = \frac{C_1}{Q_2(x)^{m-1}} + \int \frac{C_2}{Q_2(x)^{m-1}} dx$$

e possiamo dedurre (8.2.3.15).

□

Poniamo

$$T(x) = (x-\alpha_1)^{m_1-1} \cdots (x-\alpha_h)^{m_h-1}((x-p_1)^2+q_1^2)^{\mu_1-1} \cdots ((x-p_k)^2+q_k^2)^{\mu_k-1}.$$

Abbiamo la seguente

Proposizione 8.2.3.1. *Esistono numeri A_j, B_j, C_j ed esiste un polinomio $R(x)$ con $\mathrm{grad} R = \mathrm{grad} T - 1$ tale che per ogni x con $Q(x) \neq 0$ vale l'identità*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{h} \frac{A_j}{(x-\alpha_j)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_j x + C_j}{(x-p_j)^2 + q_j^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{T(x)}\right).$$

Problema 8.2.3.1. *Verificare l'affermazione della preposizione precedente per*

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = (x^2-1)(x^2+1)^2.$$

Problema 8.2.3.2. *Calcolare*

$$\int \frac{2-x^2}{(x+1)^2(x+2)^2} dx.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\frac{2-x^2}{(x+1)^2(x+2)^2} = -\frac{x}{(x+1)(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)^2(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}.$$

Possiamo supporre

$$\frac{2-x^2}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{a+bx}{(x+1)^2} + \frac{c+dx}{(x+2)^2}$$

e quindi

$$2-x^2 = (a+bx)(x+2)^2 + (c+dx)(1+x)^2$$

Confrontando i coefficienti troviamo

$$b+d=0,\ a+4b+c+2d=-1, 4a+4b+2c+d=0, 4a+c=2$$

e

$$b=d=0, a=1, c=-2.$$

Cosi

$$\int \frac{2-x^2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx = -(1+x)^{-1} + (x+x)^{-1} + c.$$

□

Problema 8.2.3.3. *Calcolare*

$$\int \frac{x^2+22x+13}{(x-1)^2(x+2)^2}dx.$$

Risp.

$$-4(x-1)^{-1} + 3(x+2)^{-1} + c.$$

□

Problema 8.2.3.4. *Calcolare*

$$\int \frac{x^2+22x+10}{(x+2)^2(x^2-2x+2)}dx.$$

Risp.

$$4\arctan(x-1) + 3(x+2)^{-1} + c.$$

□

Problema 8.2.3.5. *Calcolare*

$$\int \frac{3x^2+2x+4}{x^3-1}dx.$$

Risp.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(2(x+1/2)/\sqrt{3}) - 3\log(x-1) + c.$$

□

8.2.4 Integrali del tipo $\int R(x, \sqrt{ax+b})dx$.

Si fa la sostituzione

$$t^2 = ax + b.$$

Abbiamo

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right)\frac{2t}{a}dt.$$

Problema 8.2.4.1. *Calcolare*

$$\int \frac{\sqrt{2x+3}-x}{x-1}\,dx$$

Risposta Poniamo $t = \sqrt{2x+3}$, da cui $t^2 = 2x+3$ e quindi $x = \dfrac{t^2-3}{2}$ da cui $dx = t\,dt$. Sostituendo nell'integrale proposto

$$\int \frac{\left(t - \frac{t^2-2}{2}\right)t}{\frac{t^2-3}{2}-1}\,dt = -\int \frac{t^3-2t^2-3t}{t^2-5}\,dt.$$

Effettuando la divisione tra numeratore e denominatore della funzione integranda possiamo scrivere: $t^3-2t^2-3t = (t-2)(t^2-5)+(2t-10)$. Sostituiamo l'espressione ottenuta nell'integrale:

$$-\int \frac{t^2-2t-3}{t^2-5}\,dt \;=\; -\int (t-2)\,dt + \int \frac{2t-10}{t^2-5}\,dt$$

Osserviamo che
$$\frac{2t-10}{t^2-5} = \frac{A}{t-\sqrt{5}} + \frac{B}{t+\sqrt{5}}$$
Da cui si ha $2t-10 = (A+B)t + (A-B)\sqrt{5}$, e quindi il sistema
$$\begin{cases} A+B &= 2 \\ A-B &= -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
Da questo otteniamo $A = \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}$. Sostiuiamo questi valori nell'integrale dato e risolviamo ottenendo l'insieme delle primitive:
$$-\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}} \log|t-\sqrt{5}| + \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}} \log|t+\sqrt{5}| + C.$$

Problema 8.2.4.2. *Calcolare*
$$\int \frac{x^2+3}{1+\sqrt{x+1}} dx.$$

8.2.5 Integrali del tipo $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}\right) dx$.

Si fa il cambiamento di variabili
$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$$

Problema 8.2.5.1. *Calcolare*
$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} dx$$

Risposta.

Poniamo $t^3 = \dfrac{x+1}{x-1}$, da cui segue $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$ e $dx = \dfrac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$. Sostituiamo nell'integrale dato
$$-6\int \frac{t^4}{(t^3+1)^2}\,dt$$

Si osservi che il grado del numeratore è minore del grado del denominatore. Calcoliamo le radici del denominatore per applicare il *metodo di Hermite*: $t_1 = -1$, $t_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $(t^3+1)^2 = (t+1)^2[(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2$.

Quindi dobbiamo determinare $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^4}{(t^3+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{d}{dt}\frac{R(t)}{T(t)},$$

dove

$$T(t) = (t+1)[(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}], \quad R(t) = Dt^2 + Et + F.$$

Quindi

$$\frac{t^4}{(t^3+1)^2} = \frac{A(t+1)(t^2-t+1)^2}{(t^3+1)^2} +$$

$$+\frac{(Bt+C)(t+1)^2(t^2-t+1) + (2Dt+E)(t^3+1) - 3t^2(Dt^2+Et+F)}{(t^3+1)^2}.$$

Da questa relazione ricaviamo A, B, C, D, E, F e quindi risolviamo l'integrale sostituendo sopra.

Un altro modo di scomporre la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ alternativo al *metodo di Hermite* è il seguente:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \\
& \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} + \cdots \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \frac{A_{h1}}{x-\alpha_h} + \frac{A_{h2}}{(x-\alpha_h)^2} + \cdots + \frac{A_{hm_h}}{(x-\alpha_h)^{m_h}} + \\
& \frac{B_{11}x + C_{11}}{[(x-p_1)^2 + q_1^2]} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{[(x-p_1)^2 + q_1^2]^2} + \cdots + \frac{B_{1\mu_1}x + C_{1\mu_1}}{[(x-p_1)^2 + q_1^2]^{\mu_1}} + \\
& + \frac{B_{21}x + C_{21}}{[(x-p_2)^2 + q_2^2]} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{[(x-p_2)^2 + q_2^2]^2} + \cdots \frac{B_{2\mu_2}x + C_{2\mu_2}}{[(x-p_2)^2 + q_2^2]^{\mu_2}} + \cdots + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& \frac{B_{k1}x + C_{k1}}{[(x-p_k)^2 + q_k^2]} + \frac{B_{k2}x + C_{k2}}{[(x-p_k)^2 + q_k^2]^2} + \cdots + \frac{B_{k\mu_k}x + C_{k\mu_k}}{[(x-p_k)^2 + q_k^2]^{\mu_k}}.
\end{aligned}$$

Come esempio applichiamo al problema precedente questa scomposizione

$$\frac{t^4}{(t^3+1)^2} = \frac{A_{11}}{t+1} + \frac{A_{12}}{(t+1)^2} + \frac{B_{11}t + C_{11}}{[(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]} + \frac{B_{12}t + C_{12}}{[(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2}$$

Da cui

$$\frac{t^4}{(t^3+1)^2} = \frac{A_{11}(t+1)(t^2-t+1)^2 + A_{12}(t^2-t+1)^2}{(t^3+1)^2} +$$
$$+ \frac{(B_{11}t + C_{11})(t^2-t+1)(t+1)^2 + (B_{12}t + C_{12})(t+1)^2}{(t^3+1)^2}.$$

Otteniamo quindi un sistema lineare di primo grado in sei equazioni nelle incognite A_{11}, A_{12}, B_{11}, B_{12}, C_{11}, C_{12}, che risolto mi permette di scomporre la frazione $\frac{t^4}{(t^3+1)^2}$ in somma di frazioni delle quali si riesce a calcolare le primitive in maniera elementare.

Problema 8.2.5.2. *Calcolare*

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$$

8.2.6 Integrale del tipo $\int R\left(x,\ \sqrt[q_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}},\ \cdots\ ,\ \sqrt[q_h]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_h}}\right).$

Dove $p_j, q_j \in \mathbb{N},\ p_j > 0,\ q_j > 1\ j = 1, \cdots, h$. Questi integrali si possono ricondurre ad integrali di funzioni razionali mediante la sostituzione:

$$t^q = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

dove

$$q = m.c.m.(q_1, \cdots, q_h)$$

Problema 8.2.6.1. *Calcolare*

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}\ \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\ dx$$

Risposta In questo caso $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, quindi $q = 6$. Si pone

$$t^6 = \frac{x+1}{x+2}$$

da cui

$$x = \frac{2t^6 - 1}{1 - t^6} \quad \text{e} \quad dx = \frac{6t^5}{(1-t^6)^2} dt.$$

Ci riconduciamo quindi a risolvere l'integrale

$$\int \frac{t^4}{(1-t^6)^2}\ dt.$$

8.2.7 Integrali del tipo $\int R\left(x, \sqrt{x^2+ax+b}\right)\, dx$.

Esempio 8.2.7.1. *Calcoliamo*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}}.$$

É un integrale della tabella

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} = \log(x + (1+x^2)^{1/2}) + c.$$

Esempio 8.2.7.2. *Calcoliamo*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Usiamo le relazioni

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \int \frac{xd(x^2+1)}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} + \int x d\left((x^2+1)^{-1/2}\right) =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} + x(x^2+1)^{-1/2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} =$$

$$= x(x^2+1)^{-1/2}.$$

In generale per l'integrale del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+ax+b}\right) dx$$

si fa il cambiamento di variabili

$$\sqrt{x^2+ax+b} = x+t.$$

Problema 8.2.7.1. *Calcolare*

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx.$$

Poniamo

$$\sqrt{x^2-2x+3} = x+t$$

da cui

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{3-t^2}{t+1}, \quad dx = \frac{1}{2}\,\frac{-t^2-2t-3}{(t+1)^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2-2x+3} = \frac{1}{2}\,\frac{3-t^2}{t+1} + t.$$

Sostituendo sopra ci riconduciamo a risolvere

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-3t^2+2t+11}{(t+1)^2} dt.$$

Problema 8.2.7.2. *Calcolare*

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx.$$

8.2.8 Integrali del tipo $\int R\left(x, \sqrt{-x^2+ax+b}\right)\, dx$.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ le radici dell'equazione $-x^2+ax+b=0$, (se le radici sono complesse l'espressione non è definita) supponiamo $\alpha < \beta$. Osserviamo che

$$\sqrt{-x^2+ax+b} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (\beta-x)\,\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

Si pone

$$t^2 = \frac{x-\alpha}{\beta-x} \quad \text{quindi} \quad \sqrt{-x^2+ax+b} = t(\beta-x).$$

Problema 8.2.8.1. *Calcolare*

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}\, dx$$

Le radici del radicando sono $\alpha=-2$, $\beta=4$. Quindi poniamo

$$t = \sqrt{\frac{x+2}{4-x}}$$

da cui

$$x = \frac{4t^2-2}{1+t^2},\ \ dx = \frac{12t}{(1+t^2)^2}\, dt$$

Sostituendo nell'integrale dato, ci riconduciamo a risolvere

$$2\int \frac{5t^2-1}{(1+t^2)^2}\, dt$$

8.2.9 Integrali del tipo $\int x^m(ax^p+b)^q dx$.

Questi integrali si trasformano in un integrale di funzioni razionali se almeno uno dei seguenti numeri

$$q, \frac{m+1}{p},\ q+\frac{m+1}{p}$$

è intero. Nel caso in cui q è intero q si ritorna ad uno dei casi esaminati in precedenza. Se è intero

$$\frac{m+1}{p},$$

o

$$q+\frac{m+1}{p}$$

si fa il cambiamento di variabili

$$x^p = t.$$

Problema 8.2.9.1. *Calcolare*

$$\int x^3\left(3+2x^2\right)^{\frac{1}{3}}\ dx.$$

In questo caso

$$m=3,\ p=2\,q=\frac{1}{3}$$

risulta intero

$$\frac{m+1}{p}=2.$$

Si pone $x^2 = t$, quindi $x = \sqrt{t}$, e $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\ dt$. L'integrale diventa

$$\frac{1}{2}\int t\ (3+2t)^{\frac{1}{3}}\ dt,$$

che è del tipo visto nel $S4$.

Problema 8.2.9.2. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{3+2\sqrt[3]{x^8}}}\quad\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$$

L'integrale può essere scritto nella forma

$$\int x^{\frac{1}{3}}\ \left(3+2x^{\frac{8}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}\ dx.$$

In questo caso

$$m = -\frac{1}{3},\ p = \frac{8}{3},\ q = -\frac{1}{4}$$

Risulta intero $q + \frac{m+1}{p}$. Si pone $x^{\frac{8}{3}} = t$ da cui $x = t^{\frac{3}{8}}$ e $dx = \dfrac{3}{8} t^{-\frac{5}{8}}\, dt$. Sostituendo nell'integrale otteniamo

$$\frac{3}{8} \int \frac{1}{t} \left(\frac{t}{3+2t} \right)^{\frac{1}{4}} \, dt,$$

che è del tipo di integrali visti nel $S4$.

Problema 8.2.9.3. *Calcolare*

$$\int x^3(1+2x^2)^{-3/2} dx.$$

8.2.10 Integrali del tipo $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Si possono effettuare vari cambiamenti variabili. La scelta dipende dall'espressione della funzione integranda. Il più generale è il seguente

$$t = \tan \frac{x}{2}.$$

da cui

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Altri cambiamenti di variabile che si possono effettuare sono

$$t = \cos x,\ \text{oppure}\ t = \sin x,\ \text{oppure}\ t = \tan x.$$

Vediamo alcuni esempi.

Problema 8.2.10.1. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1} \, dx$$

Risposta. Poniamo

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

Sostituiamo nell'integrale dato

$$\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{1+t}\, dt = \log|1+t| + C$$

Tenuto conto della posizione fatta l'insieme delle primitive dell'integrale di partenza è dato da:

$$\log\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right) + C.$$

Problema 8.2.10.2. *Calcolare*

$$\int \frac{\sin x(\cos x - 1)}{1+\cos^2 x}\, dx$$

Risposta Poniamo $t = \cos x$ da cui $dt = -\sin x dx$. Sostituendo nell'integrale proposto

$$-\int \frac{t-1}{1+t^2}\, dt = -\frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt + \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = -\log|1+t^2| + \arctan(t) + C$$

Quindi

$$\int \frac{\sin x(\cos x - 1)}{1+\cos^2 x}\, dx = -\log|1+\cos^2 x| + \arctan(1+\cos^2) + C$$

Problema 8.2.10.3. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{(\sin x - 3)\cos x}\, dx$$

Risposta

$$\int \frac{1}{(\sin x - 3)\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin x - 3} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\sin x - 3} \frac{1}{1-\sin^2 x} \cos x\, dx$$

Poniamo $t = \sin x$, quindi $dt = \cos x dx$. Sostituendo nell'integrale di partenza ci riportiamo a risolvere

$$\int \frac{1}{t-3} \frac{1}{1-t^2}\, dt.$$

Problema 8.2.10.4. *Calcolare*

$$\int \frac{\sin^2 x + 4\cos^2 x}{\tan x + 2}\, dx$$

Risposta.

$$\int \frac{\sin^2 x + 4\cos^2 x}{\tan x + 2}\, dx \;=\; \int \cos^4 x\, \frac{\tan^2 x + 4}{\tan x + 2}\, \frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{(1+\tan^2 x)^2}\, \frac{\tan^2 x + 4}{\tan x + 2}\, (1+\tan^2 x)\; dx$$

Poniamo $t = \tan x$, da cui $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\, dx = (1+\tan^2 x)\, dx$. Sostituendo nell'integrale dato ci riconduciamo a risolvere

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\, \frac{t^2+4}{t+2}\, dt$$

Problema 8.2.10.5. *Calcolare*

$$\int \frac{1-\sin x}{\sin x(1-\cos x)} dx.$$

8.2.11 Vari esercizi sugli integrali indefiniti

Problema 8.2.11.1. *Calcolare*

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx, \\
&(\mathbf{b}) \int \frac{\ln x}{x^2} dx, \\
&(\mathbf{c}) \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx \\
&(\mathbf{d}) \int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx, \\
&(\mathbf{e}) \int \mathrm{e}^x x^2 dx \\
&(\mathbf{f}) \int x^2 \sin x dx \\
&(\mathbf{g}) \int \frac{x-1}{4x^3 - x} dx \\
&(\mathbf{h}) \int \frac{x}{(x^2+2)(x-2)} dx \\
&(\mathbf{i}) \int \frac{x^3}{(x+1)(x-2)} dx \\
&(\mathbf{j}) \int \frac{x(x+3)}{(x^4-1)} dx \\
&(\mathbf{k}) \int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx \\
&(\ell) \int \frac{dx}{\sin x} \\
&(\mathbf{m}) \int \frac{dx}{1+\cos x} \\
&(\mathbf{n}) \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} \\
&(\mathbf{o}) \int \frac{\cos^3 x \sin 2x}{1+\cos^2 x} dx.
\end{aligned}$$

Problema 8.2.11.2. *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx.$$

Risposta. $I(x) = C + x/\ln x$.

Problema 8.2.11.3. *Calcolare*

$$\int (1 + \log x) x^{2x} dx.$$

Suggerimento. Effettuare la sostituzione

$$x \log x = t.$$

La risposta é

$$x^{2x}/2.$$

□

Problema 8.2.11.4. *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Risposta.

$$I(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Problema 8.2.11.5. *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{xdx}{1 + x^4}.$$

Problema 8.2.11.6. *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{xdx}{1 + x^6}.$$

Problema 8.2.11.7. *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{xdx}{1 + x^8}.$$

Problema 8.2.11.8. *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{dx}{1+x^4}.$$

Suggerimento. Verificare l'identitá

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} =$$

$$= \frac{-\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} + \frac{\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

Alla fine la risposta é

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left[-2\arctan\left((1-\sqrt{2}x\right)+2\arctan\left((1+\sqrt{2}x\right)\right] -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{8}\log\left(\frac{(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}\right).$$

□

Problema 8.2.11.9. *Calcolare*

$$I(x) = \int \sqrt{\tan x}dx.$$

Suggerimento. La sostituzione

$$\sqrt{\tan x} = t$$

implica

$$\tan x = t^2$$

e quindi abbiamo

$$x = \arctan(t^2), \quad dx = \frac{2tdt}{1+t^4}.$$

Dopo la sistituzione troviamo

$$I = \int \frac{2t^2dt}{1+t^4}.$$

e possiamo seguire il metodo standard della soluzione del problema 8.2.11.8 per esempio. □

Problema 8.2.11.10. *Calcolare*

$$I_\alpha(x) = \int x^\alpha \ln x \; dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e' trovare una funzione $F(x)$ *tale che*

a) $F(x)$ *é primitiva di* $x^\alpha \ln x$,

b) $F(e) = 1$.

Chapter 9

Esercizi su integrali definiti e impropri

9.1 Integrale di Riemann ed esercizi

Problema 9.1.0.1. *Calcolare*

$$(\mathbf{a})\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx,\ \ (\mathbf{b})\int_0^1 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}dx,\ \ (\mathbf{c})\int_0^1 \frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x}}dx$$

$$(\mathbf{d})\int_1^{10} \frac{dx}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}dx,\ \ (\mathbf{e})\int_{1/2}^2 \mathrm{e}^{-1/x}\frac{dx}{x^2}\ \ (\mathbf{f})\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$$

Problema 9.1.0.2. *Calcolare*

$$\int_{-1}^1 \left|e^x-1\right|\,dx.$$

Risposta. Tenuto conto della seguente proprietà degli integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ \ a<c<b,$$

e di

$$\left|e^x-1\right| = \begin{cases} e^x-1 & x\ge 0\\ -e^x+1 & x<0,\end{cases}$$

sostituiamo

$$\int_{-1}^{0} -\big(e^x - 1\big)\, dx + \int_{0}^{1} \big(e^x - 1\big)\, dx = \big[-e^x\big]_{-1}^{0} + \big[x\big]_{-1}^{0} + \big[e^x\big]_{0}^{1} + \big[x\big]_{0}^{1} = 2e.$$

Problema 9.1.0.3. *Calcolare*

$$\int_{0}^{2} e^{|x-1|}\, dx.$$

Risposta. Da

$$e^{|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & x \geq 1 \\ e^{-(x-1)} & x < 1, \end{cases}$$

e dalla proprietà degli integrali definiti vista nell'esercizio precedente otteniamo

$$\int_{0}^{2} e^{|x-1|}\, dx. = \int_{0}^{1} e^{-(x-1)}\, dx + \int_{1}^{2} e^{x-1}\, dx = \big[-\,e e^{-x}\big]_{0}^{1} + \big[e^{-1}\, e^x\big]_{1}^{2} = 2e - 2.$$

Problema 9.1.0.4. *(disequazione di Cauchy) Se $f, g \in C[a,b]$ dimostrare la disequazione*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx. \qquad (9.1.0.1)$$

Problema 9.1.0.5. *(disequazione di Hölder) Se $p, q \in (1,\infty)$ soddisano*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

allora per ogni $f, g \in C[a,b]$ abbiamo la disequazione

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}. \qquad (9.1.0.2)$$

Problema 9.1.0.6. *(disequazione di Minkowski) Se $p \in (1,\infty)$ allora per ogni $f, g \in C[a,b]$ abbiamo la disequazione*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p}. \qquad (9.1.0.3)$$

Problema 9.1.0.7. *Se* $f(x) \in C[0,1]$ *e la funzione e' derivabile in* (a,b) *e soddisfa la condizione*

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq 1 \tag{9.1.0.4}$$

allora la condizione $f(0) = 0$ *implica*

$$|f(x)| \leq 1 \tag{9.1.0.5}$$

per ogni $x \in [0,1]$.

Problema 9.1.0.8. *Se* $f(x) \in C[0,1]$ *e la funzione e' derivabile in* (a,b) *e soddisfa le condizioni*

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq 1 \tag{9.1.0.6}$$

e

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq 1 \tag{9.1.0.7}$$

implicano

$$|f(x)| \leq 3 \tag{9.1.0.8}$$

per ogni $x \in [0,1]$.

Problema 9.1.0.9. *Calcolare*

$$I = \int_{-3}^{3} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1 + x^2 + x^{1000}} \arctan^2(x + x^{2005}) dx.$$

Risposta $I = 0$.

Problema 9.1.0.10. *Calcolare*

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{1 + \mathrm{e}^{\sin x}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\ dx.$$

Risposta $I = 2/3$.

Problema 9.1.0.11. *Dimostrare che per ogni funzione f continua abbiamo*

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

Problema 9.1.0.12. *Calcolare*

$$I = \int_0^\pi x \, \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \, dx.$$

Risposta $I = \pi^2/4$.

Problema 9.1.0.13. *Se $f \in C[0,1]$ e' crescente, allora per ogni numero $\alpha \in (0,1)$ abbiamo*

$$\int_0^1 f(t)dt \geq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt.$$

9.2 Funzioni integrabili in senso improprio.

Sia $f \ : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è *integrabile in senso improprio* su $(a,b]$ se

1. f è *integrabile secondo Riemann* in ogni intervallo $(c,b]$ con $a < c < b$,

2. esiste finito il limite $\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\, dx$,

in tal caso poniamo

$$\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\, dx \, = \int_a^b f(x)\, dx$$

Analogamente
Sia $f \ : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è *integrabile in senso improprio* su $[a,+\infty)$ se

1. f è *integrabile secondo Riemann* in ogni intervallo $[a,c]$ con $a < c$,

2. esiste finito il limite $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$,

in tal caso poniamo

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx \;=\; \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

9.2.1 Esempi di integrali impropri

Problema 9.2.1.1 (Primo esempio)**.** *Studiare (al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza del integrale improprio*

$$\int_0^b x^\alpha\, dx, \quad b > 0.$$

Soluzione. Dobbiamo vedere se esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^b x^\alpha\, dx.$$

Abbiamo le relazioni

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

se $\alpha \neq -1$ e

$$\int x^{-1} dx = \ln x + C$$

se $\alpha = -1$. Quindi se $\alpha > -1$ abbiamo

$$\int_\varepsilon^b x^\alpha\, dx = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

e si vede subito che possiamo avere il limite richiesto perche

$$\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \to 0, \quad \text{se} \quad \alpha > 1.$$

Troviamo

$$\int_0^b x^\alpha\, dx = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1.$$

In questo modo arriviamo alla conclusione

$$\int_0^b x^\alpha \, dx \begin{cases} = (\alpha+1)^{-1} b^{\alpha+1}, & \text{se } \alpha > -1; \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq -1. \end{cases} \tag{9.2.1.9}$$

□

In definitiva la funzione

$$f(x) = x^\alpha$$

è *integrabile in senso improprio* su $(0, b)$ se $\alpha > -1$.

Problema 9.2.1.2. *Studiare (al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza del integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} x^\alpha \, dx, \quad a > 0.$$

Soluzione. Sia $N > a$. Dobbiamo vedere se esiste il limite

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N x^\alpha \, dx$$

Abbiamo (come nel esempio precedente)

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

se $\alpha \neq -1$ e

$$\int x^{-1} dx = \ln x + C$$

se $\alpha = -1$ e quindi (per $\alpha \neq -1$)

$$\int_a^N x^\alpha \, dx = \frac{N^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Se $\alpha < -1$ abbiamo

$$\frac{N^{\alpha+1}}{\alpha+1} \to 0$$

quando $N \to \infty$. In questo modo deduciamo

$$\int_a^{+\infty} x^\alpha \, dx, = -\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

se $\alpha > -1$. In questo modo arriviamo alla conclusione

$$\int_a^{\infty} x^\alpha \, dx \begin{cases} = -(\alpha+1)^{-1} a^{\alpha+1}, & \text{se } \alpha < -1; \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \geq -1. \end{cases} \tag{9.2.1.10}$$

$\square$

In definitiva la funzione

$$f(x) = x^\alpha$$

è *integrabile in senso improprio* su $[a, +\infty)$ se $\alpha > -1$.

9.2.2 Criterio di confronto per integrai impropri

Prima consideriamo integrale improprio

$$\int_a^b f(x) dx$$

con singolaritá al punto a.

Lemma 9.2.2.1 (Principio di confronto, variante I)**.** *Sia f, g sono due funzioni continue nel intervallo $(a, b]$, $f(x)g(x) \neq 0$ per $x > a$ vicino a a e tali che*

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0. \tag{9.2.2.11}$$

Allora l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

converge se e solo se converge l'integrale

$$\int_a^b g(x) dx$$

Analogamente si puo studiare integrale improprio

$$\int_a^b f(x)dx$$

con singolaritá al punto b.

Lemma 9.2.2.2 (Principio di confronto, variante 2)**.** *Sia f, g sono due funzioni continue nel intervallo $[a, b)$, $f(x)g(x) \neq 0$ per $x < b$ vicino a b e tali che*

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0. \tag{9.2.2.12}$$

Allora l'integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

converge se e solo se converge l'integrale

$$\int_a^b g(x)dx.$$

9.2.3 Esempi ed esercizi

Problema 9.2.3.1. *Studiare la convergenza del integrale*

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x^3+1}}\, dx. \tag{9.2.3.13}$$

Soluzione. La funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x^3+1}}$$

é continua in $(-1, \infty)$ e abbiamo sviluppo di Taylor vicino a $x = -1$ come segue

$$\sin(x+1) = (x+1)(1+o(1)), \ \sqrt{x^3+1} = \sqrt{x+1}(1+o(1))$$

$$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x^3+1}} = \sqrt{x+1}(1+o(1))$$

e quindi l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x^3+1}}\, dx \tag{9.2.3.14}$$

converge. Per $x \to \infty$ abbiamo la stima

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

e quindi l'integrale improprio

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x^3+1}}\, dx \tag{9.2.3.15}$$

converge. Se le due integrali impropri (9.2.3.14) e (9.2.3.15) convergono, allora converge anche (9.2.3.13). □

Problema 9.2.3.2. *Studiare la convergenza del integrale*

$$I_\alpha = \int_0^1 (sinx)^\alpha \arctan x dx \tag{9.2.3.16}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolare l'integrale I_α.

Soluzione. La funzione $(\sin x)^\alpha$ é ben definita per $x \in (0,1]$, perche $\sin x > 0$ per $x \in (0,1]$. Inoltre é una funzione continua in $(0,1]$. La funzione $\arctan x$ é continua in $[0,1]$. Cosí la convergenza del integrale in (9.2.3.16) é equivalente alla convergenza del integrale

$$\int_0^\delta (sinx)^\alpha \arctan x dx \tag{9.2.3.17}$$

per ogni $\delta > 0$.

Usando lo sviluppo in Taylor abbiamo

$$\sin x = x(1+o(1), \quad (\sin x)^\alpha = x^\alpha(1+o(1)),$$

$$\arctan x = x(1+o(1)$$

e quindi la funzione

$$f(x) = (sinx)^\alpha \arctan x$$

ha sviluppo in Taylor

$$f(x) = x^{\alpha+1}(1 + o(1)).$$

Possimo scegliere

$$g(x) = x^{\alpha+1}$$

é applicando il Criterio di confronto [Principio di confronto, variante I] 9.2.2.1, possiamo concludere che la convergenza del'integrale in (9.2.3.17) é equivalente alla convergenza del integrale

$$\int_0^\delta x^{\alpha+1} dx \qquad (9.2.3.18)$$

e quindi applicando il criterio di convergenza per questo integrale di base (vedi Problema 9.2.1.1) vediamo che l'integrale converge se e solo se $\alpha + 1 > -1$ oppure $\alpha > -2$.

Per $\alpha = 0$ abbiamo

$$I_\alpha = \int_0^1 \arctan x dx = \big(x \arctan x\big)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \arctan 1 - \Big(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big)\Big|_0^1 = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2.$$

□

Problema 9.2.3.3. *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{k=1}^\infty c_k, \quad c_k = \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{\sin y}{(y+1)} dy.$$

Soluzione. La successione c_k soddisfa le proprietá

$$c_1 > -c_2 > c_3 > -c_4 > \cdots > c_{2N-1} > -c_{2N} > 0$$

e $c_k \to 0$. Quindi, la serie converge

□

Problema 9.2.3.4. *Calcolare*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}.$$

Problema 9.2.3.5. *Calcolare*

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx, \quad a>0.$$

Procedendo in modo analogo a quello visto in precedenza si ottiene che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ se $\alpha < 1$.

9.2.4 Sviluppo in Taylor e integrali impropri

Sia $f(x), g(x)$ sono due funzioni in $C^1([a,b])$. Abbiamo la seguente proprietá.

Lemma 9.2.4.1. *Se esiste un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) \neq 0$ e*

$$f(x_0) \neq 0,\ \ g(x_0) = 0, g'(x_0) \neq 0 \tag{9.2.4.19}$$

allora abbiamo integrale improprio

$$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx \tag{9.2.4.20}$$

che diverge.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $x_0 = a$. L'integrale

$$\int_a^{a+\delta} \frac{f(x)}{g(x)}dx \tag{9.2.4.21}$$

diverge, perché

$$f(x) = f(x_0)(1+o(1)), g(x) = g'(x_0)(x-x_0)(1+o(1))$$

e quindi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0}{g'(x_0)(x-x_0)}\left(1+o(1)\right).$$

□

Lemma 9.2.4.2. *Se esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) \neq 0$ e*

$$f(x_0) \neq 0, \ g(x_0) = 0, g'(x_0) = 0, g''(0) \neq 0 \tag{9.2.4.22}$$

allora abbiamo integrale improprio

$$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx \tag{9.2.4.23}$$

che diverge.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $x_0 = a$. L'integrale

$$\int_a^{a+\delta} \frac{f(x)}{g(x)} dx \tag{9.2.4.24}$$

diverge, perché

$$f(x) = f(x_0)(1 + o(1)), g(x) = g''(x_0)(x - x_0)^2 \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

e quindi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0}{g''(x_0)(x - x_0)^2} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

□

Problema 9.2.4.1. *Studiare la convergenza del integrale*

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x + e^x}. \tag{9.2.4.25}$$

Soluzione. La funzione $g(x) = x + e^x$ é sempre crescente, perché

$$g'(x) = 1 + e^x > 0. \tag{9.2.4.26}$$

Nel intervallo $(-1, 0)$ la funzione cambia il segno e quindi (come funzione crescente) esiste unico punto $x_0 \in (-1, 0)$ tale che

$$g(x_0) = 0$$

La proprietá (9.2.4.26) implica che sono soddisfatti le condizioni del Lemma 9.2.4.1 e quindi l'integrale diverge. □

9.2.5 Altri integrali impropri

Problema 9.2.5.1. *Sia* $f \in C^0\big([a,+\infty)\big)$. *Supponiamo che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0$$

dimostrare che

$$\int_a^{+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & L>0 \\ -\infty & L<0 \end{cases}$$

Una funzione f si dice *assolutamente integrabile in senso improprio* se è *integrabile in senso improprio* la funzione $|f|$.

Si dimostra che

se f *assolutamente integrabile in senso improprio* allora è *integrabile in senso improprio.*

Questa proposizione ci permette di risolvere il seguente problema.

Problema 9.2.5.2. *Dimostrare che esiste finito il seguente integrale improprio.*

$$\int_a^{+\infty} \sin x^2\, dx$$

Non è restrittivo considerare $a>0$. Sia $a<b$. Dopo aver effettuato il cambiamento di variabile $x^2=t$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^2 x\, dx &= \int_{a^2} b^2 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \quad \text{(integrazione per parti)} \\
&= \Big[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Big]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\, dt = -\frac{\cos b^2}{b} + \frac{\cos a^2}{a} - \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\, dt
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{\cos b^2}{b} = 0$$

mentre

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\, dt < +\infty$$

perchè
$$\left|\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\right| < \frac{1}{\sqrt{t^3}}, \ \ t > 0.$$
Poichè la funzione $t \to \frac{1}{\sqrt{t^3}}$ è integrabile in senso improprio su $(a, +\infty)$ anche $x \to \left|\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\right|$ risulta integrabile in s.i. in tale intervallo e quindi la funzione $x \to \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}$ è ivi assolutamente integrabile in s.i. e dunque integrabile in s.improprio. Abbiamo anche utilizzato il *criterio del confronto per integrali impropri* nelle considerazioni precedenti.

Problema 9.2.5.3. *Studiare al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'integrabilita sulla semiretta* $[0, +\infty)$ *della funzione*
$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\alpha}$$

Risposta: la funzione risulta integrabile in s.i. per $\alpha > 1$.

Problema 9.2.5.4. *Studiare al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'integrabilita sulla semiretta* $[0, +\infty)$ *della funzione*
$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x}\right)^{\alpha}$$

Risposta: la funzione risulta integrabile in s.i. per $\alpha > \frac{1}{3}$.

Problema 9.2.5.5. *Dato l'integrale improprio*
$$I(n) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^n \ dx$$

1. *dimostrare che esiste finito per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*
2. *dimostrare che* $I(n) = n!$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*.*

Problema 9.2.5.6. *Studiare al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'integrabilita sulla semiretta* $(0, +\infty)$ *della funzione*
$$f(x) = \frac{x^{\alpha}}{(1 + 2\arctan x)^x - (1 + \arctan 2x)^x}$$

Risposta: Si verifica prima di tutto che il denominatore di f non ammette zeri sulla semiretta $(0, +\infty)$. Poi si studia l'integrabilità di f nei due intervalli $(0, a)$ e $(a, +\infty)$, con $a > 0$. Intersecando i valori di α per i quali f è integrabile in s. i. nei due intervalli la funzione risulta integrabile in s.i. su $(0, +\infty)$ per $\alpha > 3$.

Problema 9.2.5.7. *Calcolare il valore del seguente limite*

$$\lim_{x\to 0+} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{1-\cos t}{\sqrt{t^5}}\, dt$$

Risposta. Il valore del limite è 0.

Problema 9.2.5.8. *Calcolare il valore del seguente limite*

$$\lim_{x\to 0+} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{1-\cos t}{t^3}\, dt$$

Risposta. Il valore del limite è $\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$.

Problema 9.2.5.9. *Studiare la funzione:*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x - \int_0^x e^{t^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Problema 9.2.5.10. *Dire se la successione*

$$a_N = \sqrt{N}\int_0^{2\pi N^2} \frac{\sin x/N}{(x+N)} dx, \;\; N = 1, 2, \cdots$$

é limitata.

Soluzione. Cambiamento di variabli $Nx = y$ implica

$$\int_0^{2\pi N^2} \frac{\sin Nx}{(x+N)} dx = \int_0^{2\pi N} \frac{\sin y}{(y+1)} dy.$$

Si vede che

$$b_N = \int_0^{2\pi N} \frac{\sin y}{(y+1)} dy = \sum_{k=1}^{2N} c_k, \quad c_k = \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{\sin y}{(y+1)} dy.$$

La successione c_k soddisfa le proprietá

$$c_1 > -c_2 > c_3 > -c_4 > \cdots > c_{2N-1} > -c_{2N} > 0$$

cosi otteniamo

$$b_N > c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_{2N-2} + c_{2N} > c_1 + c_2 > 0.$$

Quindi, la successione

$$a_N = \sqrt{N} b_N > \sqrt{N}(c_1 + c_2)$$

é illimitata.

$\square$

Problema 9.2.5.11. *Sia*

$$F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} xF(x)dx.$$

Soluzione. Sia

$$F_N(x) = \prod_{k=1}^{N} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Abbiamo la relazione

$$\sin\left(\frac{x}{2^N}\right) F_N(x) = \frac{1}{2}\left[\prod_{k=1}^{N-1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \sin\left(\frac{x}{2^{N-1}}\right)$$

e procedendo usando

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2},$$

troviamo

$$\frac{1}{2}\left[\prod_{k=1}^{N-1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \sin\left(\frac{x}{2^{N-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^2}\left[\prod_{k=1}^{N-2}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]\sin\left(\frac{x}{2^{N-2}}\right) =$$

$$= \quad \cdots \quad =$$

$$\frac{1}{2^{N-1}}\cos x \sin x = \frac{1}{2^N}\sin(2x).$$

Cosí troviamo

$$F_N(x) = \frac{\sin(2x)}{2^N\sin(x/2^N)}$$

e prendendo limite $N \to \infty$, troviamo (per ogni $x \neq 0$)

$$F(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{\sin(2x)}{2^N\sin(x/2^N)} = \frac{\sin(2x)}{x}.$$

In questo modo l'integrale da calcolare diventa

$$\int_0^{\pi/4} xF(x)dx = \int_0^{\pi/4}\sin(2x)dx = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Bibliography

[1] E. Acerbi, G. Buttazzo, Primo corso di Analisi Matematica 1997, *Pitagora Editrice Bologna,* ISBN 88-371-0942-3.

[2] E. Acerbi; L. Modica; S. Spagnolo, Problemi scelti di analisi matematica I, *Liguori Editore* , 1985.

[3] S.Campanato, Lezioni di Analisi Matematica I parte, *Libreria scientifica Giordano Pellegrini, Pisa* 1993.

[4] S.Campanato, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, I parte, *Libreria scientifica Giordano Pellegrini, Pisa.*

[5] E.Guisti, Analisi Matematica 1, *Bollati Boringhieri,* 1988.

[6] E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi 1, *Bollati Boringhieri.*