

**Equazioni alle Derivate Parziali - Corso di Laurea Magistrale in
Matematica**

(A.A. 2020/2021)

Assignment II, Scritto 8.02.2021

Problema 1. Data la funzione $g \in L^2(\mathbb{R})$ studiare il problema di Cauchy

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0,$$

$$u(0, x) = 0, \partial_t u(0, x) = H'(x),$$

dove

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} (1 + (x - y)^2)^{-1} g(y) dy$$

e vedere se esiste il limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R^2} |u(R, x)|^2 dx.$$

Idea della soluzione. Per il problema di Cauchy

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0,$$

$$u(0, x) = 0, \partial_t u(0, x) = h(x)$$

usiamo la formula di D'Alembert

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$$

con

$$h(x) = H'(x)$$

dove $H(x)$ e la funzione

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} (1 + (x - y)^2)^{-1} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (1 + y^2)^{-1} g(x - y) dy$$

2

In questo modo troviamo

$$u(t, x) = \frac{H(x+t) - H(x-t)}{2}.$$

Scegliendo $x > R^2$ con R grande troviamo

$$u(R, x) = \frac{H(x+R) - H(x-R)}{2}$$

Così dobbiamo studiare

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R^2}^{\infty} |H(x \pm R)|^2 dx.$$

Abbiamo le stime

$$|H(x-R)| \lesssim \int_{|y| \leq R/2} (1+y^2)^{-1} |g(x-R-y)| dy + R^{-1/2} \int_{|y| \geq R/2} (1+y^2)^{-3/4} |g(x-R-y)| dy$$

Applicando la norma in $L^2(x > R^2)$ troviamo

$$\begin{aligned} \|H(x-R)\|_{L^2(x > R^2)} &\lesssim \int_{|y| \leq R/2} (1+y^2)^{-1} \|g(x-R-y)\|_{L^2(x > R^2)} dy + \\ &+ R^{-1/2} \int_{|y| \geq R/2} (1+y^2)^{-3/4} \|g(x-R-y)\|_{L^2(\mathbb{R})} dy. \end{aligned}$$

Usando il fatto che $g \in L^2$ troviamo

$$\|g(x-R-y)\|_{L^2(x > R^2)} \leq \|g(z)\|_{L^2(x > R^2 - R - R/2)} = o(1)$$

per $R \rightarrow \infty$. In conclusione

$$\|H(x-R)\|_{L^2(x > R^2)} \lesssim \|g(z)\|_{L^2(x > R^2 - R - R/2)} + R^{-1/2}$$

e quindi il limite cercato è 0. □

Remark 1. Regole durante lo scritto:

1. La videocamera deve essere sempre accesa

2. *Tenere lo smartphone sempre visibile sul tavolo, il cellulare si usa per vedere il testo del compito i primi 5-10 minuti e poi deve essere SPENTO e CAPOVOLTO*

3. *Durante lo svolgimento della prova é vietato l'utilizzo di appunti, libri, della tastiera del PC/Mac/tablet o del mouse a meno che non sia richiesto dal docente;*

4. *Il docente sorveglia gli studenti durante la prova e risponde in chat ad eventuali domande.*

5. *Dopo svolgimento del esercizio (quando scade il tempo di 1 ora per lo svolgimento di esercizio) lo studente utilizza SOLO CELLULARE per fare la foto e preparare UNICO pdf,jpg file . Lo studente dopo aver preparato file deve restare seduto con web accesa e senza scrivere sul foglio. Lo studente NON DEVE INSERIRE FILE IN TEAM prima che il docente glielo comunichi.*

6. *La prova dura 1 ora. SOLO dopo 1 ora lo studente puo scattare foto del suo elaborato.*

7. *Prima di inviare la soluzione TRAMITE CELLULARE lo studente contatta il docente, il docente controlla il foglio della soluzione, se necessario farà una foto. Solo dopo lo studente può inviare la soluzione.*