Analisi Complessa: note per il corso INdAM

Marco Abate

Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Roma
Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma

Gennaio 1998

0. Prerequisiti

Cominciamo con la definizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ è *olomorfa* se vale una delle seguenti tre condizioni equivalenti:

(i) per ogni $a \in \Omega$ il limite

$$f'(a) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{f(a+\zeta) - f(a)}{\zeta}$$

esiste (f è $\mathbb{C}$-*differenziabile*).

(ii) per ogni $a \in \Omega$ esiste un intorno $U \subset \Omega$ di a e una successione $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{0.1}$$

per ogni $z \in U$ (f è *analitica*).

(iii) f è continua, le derivate parziali $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ esistono su Ω e soddisfano le *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \tag{0.2}$$

su tutto Ω (f è *olomorfa*).

L'equivalenza di queste tre definizioni è il contenuto dei *Teoremi di Cauchy-Goursat* e *Looman-Menchoff*. Introducendo gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

la (0.2) può essere scritta

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0, \qquad \text{per cui} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f'.$$

Useremo anche le seguenti 1-forme:

$$dz = dx + i\,dy \qquad \text{e} \qquad d\bar{z} = dx - i\,dy.$$

L'insieme delle funzioni olomorfe definite su Ω verrà indicato con $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ o con $\mathcal{O}(\Omega)$; il sottoinsieme di $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ delle funzioni a valori in un insieme Ω_1 verrà indicato con $\mathrm{Hol}(\Omega, \Omega_1)$. Su questi spazi considereremo la topologia della convergenza uniforme sui compatti (che è lo stesso della topologia compatta-aperta): $f_n \to f$ sse per ogni compatto $K \subset\subset \Omega$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Ricordo ora alcuni risultati fondamentali sulle serie di potenze:

Teorema 0.1: (i) *Data una successione* $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$, *esiste un* $R \in [0, +\infty]$ *tale che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{0.3}$$

converge per $|z| < R$ *e diverge per* $|z| > R$. *Il numero* R *è detto raggio di convergenza* della serie (0.3). *La convergenza è uniforme sui compatti di* $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.
(ii) *Il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} \tag{0.4}$$

è uguale al raggio di convergenza della serie (0.3)*;*
(iii) *La derivata della funzione olomorfa* (0.1) *è data da*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

In particolare, ogni funzione olomorfa è infinitamente differenziabile.
(iv) *Lo sviluppo in serie di una* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *vicino ad* $a \in \Omega$ *è dato dalla serie di Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

Il raggio di convergenza di questa serie è maggiore o uguale del raggio del più grosso disco di centro a *contenuto in* Ω.

Passiamo agli integrali curvilinei:

Teorema 0.2: (Cauchy-Goursat e Morera) *Sia* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *continua. Allora* f *è olomorfa sse per ogni rettangolo (o disco) chiuso* $D \subset \Omega$ *si ha*

$$\int_{\partial D} f \, dz = 0.$$

Da questo segue la fondamentale *formula di Cauchy:*

Teorema 0.3: *Sia* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, *e* $D \subset \Omega$ *un rettangolo (o disco) chiuso. Allora*

$$\forall a \in D \qquad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} \, dz.$$

Cominciamo ora la lista delle principali proprietà delle funzioni olomorfe, iniziando col *principio d'identità* (o *del prolungamento analitico*):

Teorema 0.4: *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un dominio (cioè un aperto connesso), e* $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. *Se esiste un aperto* $U \subset \Omega$ *tale che* $f|_U \equiv g|_U$, *allora* $f \equiv g$ *su tutto* Ω. *Più in generale, se l'insieme* $\{f = g\}$ *ammette un punto d'accumulazione, allora* $f \equiv g$.

Corollario 0.5: *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un dominio, e* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *non identicamente nulla. Allora l'insieme* $\{f = 0\}$ *è discreto.*

E poi ecco le varie forme del *principio del massimo:*

Teorema 0.6: *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *aperto, e* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. *Allora:*
(i) *Se* $U \subset\subset \Omega$ *è aperto, allora*

$$\sup_{z \in U} |f(z)| \le \sup_{w \in \partial U} |f(w)|.$$

In particolare, se $|f(z)|$ *ammette un massimo locale in* Ω, *allora* f *è costante.*

(ii) *Se* $U \subset\subset \Omega$ *è aperto, allora*

$$\sup_{z\in U} \operatorname{Re} f(z) \le \sup_{w\in\partial U} \operatorname{Re} f(w).$$

In particolare, se $\operatorname{Re} f(z)$ *ammette un massimo locale in* Ω*, allora* f *è costante. La stessa cosa vale anche per* $\operatorname{Im} f(z)$*, ovviamente.*

(iii) *Supponiamo che* Ω *sia limitato e* f *non costante. Poniamo*

$$M = \sup_{x\in\partial\Omega} \limsup_{z\to x} |f(z)|.$$

Allora

$$\forall z \in \Omega \qquad |f(z)| < M.$$

Lo stesso vale per $\operatorname{Re} f$ *e* $\operatorname{Im} f$*.*

Nota: il Teorema 0.6.(iii) non si applica a domini illimitati. Per esempio, se $\Omega = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ e $f(z) = e^z$, allora $|f| \equiv 1$ su $\partial\Omega$, ma $|f(z)|$ è illimitato su Ω.

Ecco ora il *Teorema dell'applicazione aperta:*

Teorema 0.7: *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un dominio e* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *non costante. Allora* $f(\Omega)$ *è aperto.*

Le *disuguaglianze di Cauchy:*

Teorema 0.8: *Sia* $f\colon D(a,r) \to \mathbb{C}$ *olomorfa, dove* $D(a,r)$ *è il disco aperto di centro* a *e raggio* r*. Scelto* $0 < \rho < r$*, sia*

$$M(\rho) = \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)|.$$

Allora

$$\forall n \ge 0 \qquad |f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{\rho^n} M(\rho).$$

Il *Teorema di Liouville:*

Teorema 0.9: *Se* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *è limitata, allora è costante.*

Passiamo ora ai teoremi sulle successioni di funzioni, cominciando col fondamentale *Teorema di Weierstrass:*

Teorema 0.10: *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *aperto, e* $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ *una successione convergente, uniformemente sui compatti, a una* $f\colon\Omega \to \mathbb{C}$*. Allora* f *è olomorfa, e la successione* $\{f_n'\}$ *delle derivate converge, uniformemente sui compatti, a* f'*.*

Ed ora ecco il famoso *Teorema di Stieltjes-Osgood-Montel:*

Teorema 0.11: *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *aperto, e* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ *una famiglia di funzioni olomorfe uniformemente limitate sui compatti di* Ω*, cioè tale che per ogni compatto* $K \subset\subset \Omega$ *esista* $M_K > 0$ *tale che*

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall z \in K \qquad |f(z)| \le M_K.$$

Allora da ogni successione $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ *si può estrarre una sottosuccessione convergente, uniformemente sui compatti di* Ω*, a una* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$*. In particolare, se* $\Omega_1 \subset\subset \mathbb{C}$ *è limitato, questo si applica alla famiglia* $\mathcal{F} = \operatorname{Hol}(\Omega,\Omega_1)$*, e il limite appartiene a* $\operatorname{Hol}(\Omega,\Omega_1) \cup \partial\Omega_1$*.*

Una conseguenza veramente notevole è il *Teorema di Vitali:*

Teorema 0.12: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, e $A \subset \Omega$ un insieme con almeno un punto d'accumulazione. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ una successione di funzioni uniformemente limitate sui compatti di Ω, e supponiamo che $\{f_n(a)\}$ converga per ogni $a \in A$. Allora la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente sui compatti di Ω.*

Un *biolomorfismo* è una funzione $f\colon \Omega \to \Omega_1$ olomorfa invertibile e tale che f^{-1} sia olomorfa. Se $\Omega = \Omega_1$, diremo che f è un *automorfismo* di Ω, e scriveremo $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. Un *biolomorfismo locale* è una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che per ogni $a \in \Omega$ esiste un intorno $U \subset \Omega$ di a tale che $f|_U\colon U \to f(U)$ è un biolomorfismo.

Teorema 0.13: (i) *Una $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega_1)$ è un biolomorfismo sse è bigettiva.*
(ii) *Una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ è un bilomorfismo locale sse $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$.*

Passiamo ora alle singolarità di funzioni olomorfe, cominciando con lo *sviluppo di Laurent:*

Teorema 0.14: *Scelti $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, sia $A(r_1, r_2) = \{r_1 < |z| < r_2\}$ l'anello di raggio interno r_1 e raggio esterno r_2. Sia $f \in \mathcal{O}\big(A(r_1, r_2)\big)$. Allora esiste un'unica famiglia $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tale che*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

in $A(r_1, r_2)$. La serie converge uniformemente e assolutamente sui compatti di $A(r_1, r_2)$. In particolare, se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è aperto, $a \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, allora possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

in un insieme della forma $\{0 < |z-a| < r\} \subset \Omega$.

Da questo segue il *Teorema di estensione di Riemann:*

Teorema 0.15: *Siano $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e poniamo $D = D(a, r)$ e $D^* = D(a, r) \setminus \{a\}$. Sia $f \in \mathcal{O}(D^*)$ tale che*

$$\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = 0.$$

Allora f si estende olomorficamente a tutto D. In particolare, questo accade sse f è limitata in $D(a, \delta) \setminus \{a\}$ per qualche $0 < \delta < r$.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $E \subset \Omega$ discreto. Diremo che una $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è *meromorfa* in Ω se si può scrivere localmente come quoziente di funzioni olomorfe, cioè se per ogni $a \in E$ esiste un disco $D \subset \Omega$ di centro a e due funzioni g, $h \in \mathcal{O}(D)$ tali che $h \not\equiv 0$ su D e $h \cdot f|_{D\setminus E} = g|_{D\setminus E}$. L'insieme delle funzioni meromorfe su Ω (al variare di E) sarà indicato con $\mathcal{M}(\Omega)$.

Teorema 0.16: (i) *Sia $D = D(a, r)$, $D^* = D \setminus \{a\}$ e $f \in \mathcal{O}(D^*)$. Allora f è meromorfa su D sse nello sviluppo di Laurent di f esiste un $N \geq 0$ tale che $c_n = 0$ per $n < -N$.*
(ii) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $E \subset \Omega$ discreto. Una $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è meromorfa su Ω sse per ogni $a \in E$ o $|f|$ è limitata in un intorno di a oppure*

$$\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty.$$

Nel primo caso, f può venire prolungata olomorficamente ad a; nel secondo caso, diremo che a è un polo di f.

Indichiamo con $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la *sfera di Riemann*, ovvero $\mathbb{C}$ completato col punto all'infinito, dove gli intorni aperti di ∞ sono tutti gli insiemi della forma $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$, con $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto. Il Teorema 0.16.(ii) ci dice allora che $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è meromorfa in Ω sse può venire prolungata (olomorficamente) a una funzione $f\colon \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$.

Sia $D = D(a, r)$, $D^* = D \setminus \{a\}$ e $f \in \mathcal{O}(D^*)$. Diremo *ordine* di f in a il numero

$$\mathrm{ord}_a(f) = \inf\{n \mid c_n \neq 0\},$$

dove

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

è lo sviluppo di Laurent di f. Inoltre, c_{-1} è il *residuo* $\operatorname{res}_f(a)$ di f ad a, e la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

è la *parte principale* di f in a; nota che, per il Teorema 0.1.(i), la parte principale converge in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Per quanto visto, $0 > \operatorname{ord}_a(f) > -\infty$ sse a è un polo di f, e $\operatorname{ord}_a(f) > 0$ sse a è uno zero di f. Se $\operatorname{ord}_a(f) = -\infty$, diremo che a è una *singolarità essenziale* per f.

Ed ecco il *Teorema di Casorati-Weierstrass:*

Teorema 0.17: *Sia $D = D(a, r)$, $D^* = D \setminus \{a\}$ e $f \in \mathcal{O}(D^*)$ tale che a sia una singolarità essenziale per f. Allora $f(D^*)$ è denso in $\mathbb{C}$.*

Passiamo ora all'elenco dei prerequisiti riguardanti i rivestimenti. Tutti gli spazi topologici considerati saranno di Hausdorff e localmente connessi per archi.

Siano X e $\tilde{X}$ spazi topologici, e $p\colon \tilde{X} \to X$ un omeomorfismo locale. Un *sollevamento* (rispetto a p) di un'applicazione continua $f\colon Y \to X$ è un'applicazione continua $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ tale che $p \circ \tilde{f} = f$. I sollevamenti sono univocamente determinati dal punto iniziale:

Proposizione 0.18: *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un omeomorfismo locale, e Y uno spazio topologico connesso. Sia $f\colon Y \to X$ continua, e $\tilde{f}$, $\hat{f}\colon Y \to \tilde{X}$ due sollevamenti. Supponiamo esista $y_0 \in Y$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \hat{f}(y_0)$. Allora $\tilde{f} \equiv \hat{f}$.*

Un *rivestimento* è un omeomorfismo locale $p\colon \tilde{X} \to X$ tale che per ogni $x \in X$ possiamo trovare un intorno (connesso) $U \subset X$ tale che p ristretto a ogni componente connessa di $p^{-1}(U)$ sia un omeomorfismo. In altre parole, possiamo scrivere $p^{-1}(U)$ come unione disgiunta di aperti $\tilde{U}_j$ tali che $p|_{\tilde{U}_j}\colon \tilde{U}_j \to U$ sia un omeomorfismo per ogni j; diremo che U è *ben rivestito* da p. Usualmente si suppone anche che $\tilde{X}$ sia connesso (chiaramente, l'unione disgiunta di rivestimenti è un rivestimento). Inoltre, se $U \subset X$ è aperto, la restrizione di p a $p^{-1}(U)$ — o a una componente connessa di $p^{-1}(U)$ se necessario — è un rivestimento di U.

Nel seguito, poniamo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Teorema 0.19: *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un omeomorfismo locale. Allora p è un rivestimento sse per ogni curva continua $\gamma\colon I \to X$ e ogni $\tilde{a} \in p^{-1}\bigl(\gamma(0)\bigr)$ esiste un sollevamento $\tilde{\gamma}\colon I \to \tilde{X}$ di γ tale che $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$.*

L'esponenziale $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è un rivestimento, come pure le funzioni $p_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ date da $p_n(z) = z^n$ per $n \in \mathbb{N}^*$.

Un risultato fondamentale è il *Teorema di monodromia:*

Teorema 0.20: *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un omeomorfismo locale, $a \in X$ e $\tilde{a} \in p^{-1}(a)$. Siano γ_0, $\gamma_1\colon I \to X$ curve uscenti da a (cioè $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$), e sia $\Gamma\colon I \times I \to X$ un'omotopia fra γ_0 e γ_1 tale che $\gamma_t(0) = \Gamma(0, t) = a$ per ogni $t \in I$. Supponiamo che ogni curva γ_t si possa sollevare a una curva $\tilde{\gamma}_t$ con $\tilde{\gamma}_t(0) = \tilde{a}$. Allora $\tilde{\Gamma}(s, t) = \tilde{\gamma}_t(s)$ è un'omotopia fra $\tilde{\gamma}_0$ e $\tilde{\gamma}_1$ che solleva Γ.*

Ne seguono alcune conseguenze fondamentali per gli spazi semplicemente connessi (che noi supporremo sempre essere connessi):

Proposizione 0.21: *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, con $\tilde{X}$ connesso e X semplicemente connesso. Allora p è un omeomorfismo.*

Corollario 0.22: *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Allora ogni sottoinsieme aperto semplicemente connesso di X è ben rivestito da p.*

Corollario 0.23: *Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento, $U \subset X$ un aperto semplicemente connesso, $a \in U$ e $\tilde{a} \in p^{-1}(a)$. Allora esiste un unico omeomorfismo $h\colon U \to h(U) \subset \tilde{X}$ tale che $p \circ h = \mathrm{id}_U$ e $h(a) = \tilde{a}$.*

Teorema 0.24: *Sia $p:\tilde X \to X$ un rivestimento, $a \in X$ e $\tilde a \in p^{-1}(a)$. Sia Y uno spazio semplicemente connesso, e $f:Y \to X$ un'applicazione continua tale che $f(y_0) = a$ per qualche $y_0 \in Y$. Allora esiste un unico sollevamento $\tilde f:Y \to \tilde X$ tale che $\tilde f(y_0) = \tilde a$.*

Concludiamo questo elenco mescolando funzioni olomorfe e rivestimenti parlando di indice e residui. Sia $\gamma:[0,1] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa, e prendiamo $a \notin \gamma([0,1])$. L'applicazione $p:\mathbb{C} \to \mathbb{C}_a = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ data da $p(z) = a + e^z$ è un rivestimento; indichiamo con $\tilde\gamma$ un sollevamento di γ rispetto a p. Allora l'*indice* $n(\gamma, a)$ di γ rispetto ad a è

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}[\tilde\gamma(1) - \tilde\gamma(0)].$$

Le proprietà principali dell'indice sono riassunte nel seguente:

Teorema 0.25: *Sia $\gamma:[0,1] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa, e $a \notin \gamma([0,1])$. Allora:*

(i) *$n(\gamma, a)$ dipende solo da γ ed a, e non dal sollevamento scelto.*
(ii) *$n(\gamma, a)$ è un intero.*
(iii) *Abbiamo*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

(iv) *La funzione $a \mapsto n(\gamma, a)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$. In particolare, $n(\gamma, a) = 0$ per ogni a appartenente alla componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$.*
(v) *Sia $\gamma(t) = a_0 + re^{it}$. Allora $n(\gamma, z) = 1$ per ogni z contenuto nel disco $\{|z - a_0| < r\}$.*
(vi) *Se γ_1 e γ_2 sono due curve chiuse con uguale punto base $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e omotope (tramite un'omotopia che fissa il punto base) allora $n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$ per ogni $a \in \mathbb{C}$ che non appartiene alla loro immagine.*

Abbiamo quindi il *Teorema dei residui:*

Teorema 0.26: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto. Sia γ una curva chiusa in $\Omega \setminus E$ omotopa a una costante in Ω. Allora per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_{a\in E} \mathrm{res}_f(a) n(\gamma, a),$$

e la somma è finita. In particolare, se $D \subset\subset \Omega$ è un disco chiuso tale che $E \cap \partial D = \varnothing$ abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f\,dz = \sum_{a\in E\cap D} \mathrm{res}_f(a).$$

E il *Principio dell'argomento:*

Teorema 0.27: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Indichiamo con Z_f l'insieme degli zeri di f, e con P_f l'insieme dei poli di f. Sia γ una curva chiusa in $\Omega \setminus (Z_f \cup P_f)$ omotopa a una costante in Ω. Allora*

$$\sum_{a\in Z_f\cup P_f} n(\gamma, a)\mathrm{ord}_a(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz,$$

e la somma è finita. In particolare, se $D \subset\subset \Omega$ è un disco chiuso tale che $(Z_f \cup P_f) \cap \partial D = \varnothing$ abbiamo

$$\sum_{a\in(Z_f\cup P_f)\cap D} \mathrm{ord}_a(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'}{f}\,dz.$$

Il nome è dovuto al fatto che l'integrale a destra calcola la variazione nell'argomento della curva $f(\partial D)$.

I risultati di questo paragrafo sono dimostrati, per esempio, nei primi tre capitoli del libro *Complex Analysis in One Variable* di R. Narasimhan, edito dalla Birkhäuser.

1. Il fascio $\mathcal{O}$ e l'esistenza di primitive

Sia $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ una curva continua, con $\gamma(0)=a$ e $\gamma(1)=b$. Sia poi $f\colon U\to\mathbb{C}$ una funzione olomorfa definita in un intorno U di a. Intuitivamente diremo che f si può *prolungare analiticamente* lungo γ fino al punto b se esistono $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$, intorni U_j of $a_j=\gamma(t_j)$ e funzioni olomorfe $f_j\colon U_j\to\mathbb{C}$ tali che

$$f_{j-1}|_{U_{j-1}\cap U_j}\equiv f_j|_{U_{j-1}\cap U_j}$$

per $j=1,\ldots,n$ (e, ovviamente, $a_0=a$, $f_0=f$ e $U_0=U$).

Uno dei motivi per cui si introduce la teoria dei germi di funzioni olomorfe è per inserire in un contesto più generale questa nozione.

Dato un punto $a\in\mathbb{C}$, considereremo l'insieme delle coppie (U,f), dove U è un intorno aperto di a e $f\colon U\to\mathbb{C}$ è olomorfa. Introduciamo su questo insieme una relazione d'equivalenza ponendo $(U,f)\sim(V,g)$ se esiste un intorno aperto $W\subset U\cap V$ di a tale che $f|_W\equiv g|_W$ (equivalentemente, $f\equiv g$ sulla componente connessa di $U\cap V$ contenente a). $\sim$ è chiaramente una relazione d'equivalenza; una classe d'equivalenza sarà indicata col simbolo $\mathbf{f}_a$ (o simili) e detta *germe* di funzione olomorfa in a. Se (U,f) è un rappresentante di $\mathbf{f}_a$, diremo che $\mathbf{f}_a$ è il *germe* di f in a. L'insieme di tutti i germi di funzioni olomorfe in a sarà indicato con $\mathcal{O}_a$.

Se $\mathbf{f}_a\in\mathcal{O}_a$, possiamo definire il *valore* di $\mathbf{f}_a$ (e di tutte le sue derivate) in a semplicemente scegliendo un rappresentante (U,f) di $\mathbf{f}_a$ e ponendo

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad\qquad \mathbf{f}_a^{(k)}(a)=f^{(k)}(a);$$

questa definizione chiaramente non dipende dal rappresentante scelto.

Esercizio 1.1. Dimostra che $\mathcal{O}_a$, con le operazioni indotte dai rappresentanti, è una $\mathbb{C}$-algebra con un unico ideale massimale: $\mathfrak{m}_a=\{\mathbf{f}_a\in\mathcal{O}_a\mid \mathbf{f}_a(a)=0\}$.

Indichiamo con $\mathcal{O}$ l'unione disgiunta

$$\mathcal{O}=\bigcup_{a\in\mathbb{C}}\mathcal{O}_a,$$

e con $p\colon\mathcal{O}\to\mathbb{C}$ la proiezione $p(\mathbf{f}_a)=a$. Dato $\mathbf{f}_a$, sia (U,f) un suo rappresentante; indichiamo con $N(U,f)$ l'insieme dei germi rappresentati da (U,f) nei vari punti di U, cioè

$$N(U,f)=\{\mathbf{f}_z\in\mathcal{O}_z\mid z\in U\}.$$

È facile verificare (vedi l'Esercizio 1.2) che l'insieme $\{N(U,f)\}$ al variare di (U,f) fra tutti i possibili rappresentanti di $\mathbf{f}_a$ definisce un sistema fondamentale di intorni (aperti) di una topologia su $\mathcal{O}$. Lo spazio topologico così ottenuto, assieme alla funzione $p\colon\mathcal{O}\to\mathbb{C}$, è detto *fascio dei germi delle funzioni olomorfe* su $\mathbb{C}$. Se poi $\Omega\subset\mathbb{C}$ è aperto, l'insieme $\mathcal{O}_\Omega=p^{-1}(\Omega)$ sarà detto *fascio dei germi delle funzioni olomorfe* su Ω.

Esercizio 1.2. Sia X un insieme. Supponiamo che per ogni $x\in X$ sia data una famiglia $\mathfrak{U}(x)$ di sottoinsiemi di X soddisfacenti le seguenti proprietà:

(i) l'intersezione di una famiglia finita di elementi di $\mathfrak{U}(x)$ contiene un elemento di $\mathfrak{U}(x)$;
(ii) se $U\in\mathfrak{U}(x)$ allora $x\in U$;
(iii) se $U\in\mathfrak{U}(x)$ allora esiste $V\in\mathfrak{U}(x)$ tale che per ogni $y\in V$ esiste un $W\in\mathfrak{U}(y)$ contenuto in U.

È noto che allora esiste un'unica topologia su X per cui $\mathfrak{U}(x)$ sia un sistema fondamentale di intorni di x. Utilizzando questo fatto, dimostra che le famiglie $\{N(U,f)\}$ definiscono una topologia su $\mathcal{O}$.

Proposizione 1.1: *$\mathcal{O}$ è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione: Siano $\mathbf{f}_a\in\mathcal{O}_a$ e $\mathbf{g}_b\in\mathcal{O}_b$ distinti; dobbiamo considerare due casi.

(i) $a\neq b$. Siano (U,f) e (V,g) rappresentanti di $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{g}_b$ rispettivamente, tali che $U\cap V=\varnothing$. Allora chiaramente $N(U,f)\cap N(V,g)=\varnothing$.
(ii) $a=b$. Siano (U,f) e (V,g) rappresentanti di $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{g}_b=\mathbf{g}_a$, e scegliamo un disco D di centro a contenuto in $U\cap V$. Allora $N(D,f)\cap N(D,g)=\varnothing$. Infatti, sia per assurdo $\mathbf{h}_z\in N(D,f)\cap N(D,g)$; allora sia f che g definiscono il germe $\mathbf{h}_z$ in z, per cui esiste un intorno W di z su cui f e g coincidono. Ma allora, per il principio del prolungamento analitico, $f|_D\equiv g|_D$ e $\mathbf{f}_a=\mathbf{g}_a$. □

Proposizione 1.2: *L'applicazione* $p\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ *è continua, aperta e un omeomorfismo locale. In particolare,* $\mathcal{O}$ *è una varietà topologica bidimensionale.*

Dimostrazione: Sia V un aperto di $\mathbb{C}$: allora

$$p^{-1}(V) = \bigcup \{N(W,f) \mid W \subseteq V \text{ aperto e } f\colon W \to \mathbb{C} \text{ olomorfa}\}$$

è aperto, e p è continua. Inoltre $p\big(N(U,f)\big) = U$ implica che p è aperta. Infine, $z \mapsto \mathbf{f}_z$ è l'inversa di p ristretta a $N(U,f)$, per cui p è un omeomorfismo locale. □

Una *sezione* del fascio $\mathcal{O}$ su un'aperto Ω è un'applicazione continua $f\colon \Omega \to \mathcal{O}_\Omega$ tale che $p \circ f = \mathrm{id}_\Omega$; indicheremo con $\mathcal{O}(\Omega)$ l'insieme di tutte le sezioni di $\mathcal{O}$ sull'aperto Ω.

Esercizio 1.3. L'applicazione che associa ad ogni $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ la sezione $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$ data da $\varphi(z) = \mathbf{f}_z$ è una corrispondenza biunivoca fra le funzioni olomorfe sull'aperto Ω e le sezioni di $\mathcal{O}$ su Ω.

La *derivata* $d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ di germi è definita scegliendo come rappresentante di $d(\mathbf{f}_a) = d\mathbf{f}_a$ la derivata di un rappresentante di $\mathbf{f}_a$.

Una *primitiva* di una funzione olomorfa $f\colon U \to \mathbb{C}$ è una funzione (necessariamente olomorfa) $F\colon U \to \mathbb{C}$ tale che $F' = f$.

Lemma 1.3: *Sia* $D \subset \mathbb{C}$ *un disco aperto. Allora ogni funzione olomorfa su* D *ammette una primitiva, e due primitive differiscono per una costante.*

Dimostrazione: Sia $a \in D$ il centro del disco. Se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

è lo sviluppo in serie di Taylor di f in D, allora

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

è lo sviluppo in serie di Taylor di una primitiva di F. L'ultima asserzione è ovvia. □

Proposizione 1.4: $d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *è un rivestimento.*

Dimostrazione: Dato $\mathbf{f}_a \in \mathcal{O}_a$, scegliamo un rappresentante (U,f) di $\mathbf{f}_a$, e fissiamo un disco $D \subset U$ di centro a. Sia F una primitiva di f su D, e poniamo $\mathcal{D} = N(D,f)$, e, per ogni $c \in \mathbb{C}$, $\mathcal{D}_c = N(D, F+c)$. Vogliamo dimostrare che $d^{-1}(\mathcal{D}) = \cup_{c\in\mathbb{C}} \mathcal{D}_c$.

Infatti, preso $z \in D$ sia $\mathbf{g}_z \in \mathcal{O}_z$ tale che $d\mathbf{g}_z = \mathbf{f}_z$. Questo vuol dire che esiste un rappresentante (W,g) di $\mathbf{g}_z$ tale che $g' = f$; possiamo anche supporre che W sia un disco contenuto in D. Ma allora $g = F + c$ per un'opportuna costante $c \in \mathbb{C}$, e quindi $\mathbf{g}_z \in \mathcal{D}_c$. Viceversa, è ovvio che $d(\mathcal{D}_c) = \mathcal{D}$ per ogni $c \in \mathbb{C}$.

Siccome i $\mathcal{D}_c$ sono a due a due disgiunti, rimane solo da verificare che $d\colon \mathcal{D}_c \to \mathcal{D}$ sia un omeomorfismo; ma essendo continua e aperta, basta notare che è iniettiva, in quanto manda elementi distinti di $\mathcal{D}_c$ in germi in punti distinti di D. □

Sia $\mathbf{f}_a \in \mathcal{O}_a$, e $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva con $\gamma(0) = a$. Allora un *prolungamento analitico* di $\mathbf{f}_a$ *lungo* γ è un sollevamento di γ a $\mathcal{O}$, cioè una curva $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathcal{O}$ tale che $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}(0) = \mathbf{f}_a$. Se un tale prolungamento esiste, diremo che $\mathbf{f}_a$ è *prolungabile* lungo γ.

Esercizio 1.4. Sia $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva, $a = \gamma(0)$, $\mathbf{f}_a$, $\mathbf{g}_a \in \mathcal{O}_a$ prolungabili lungo γ, e $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ tale che $P(\mathbf{f}_a, \mathbf{g}_a) = 0$. Indichiamo con $\mathbf{f}_{\gamma(t)}$, rispettivamente $\mathbf{g}_{\gamma(t)}$, il germe del prolungamento di $\mathbf{f}_a$, $\mathbf{g}_a$ sopra $\gamma(t)$. Dimostra che $P(\mathbf{f}_{\gamma(t)}, \mathbf{g}_{\gamma(t)}) \equiv 0$.

Esercizio 1.5. Dimostra che $p\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ non è un rivestimento.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ una curva in Ω. Una *primitiva* di f *lungo* γ è un sollevamento, rispetto al rivestimento $d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, della curva $t \mapsto \mathbf{f}_{\gamma(t)}$. Due primitive lungo γ differiscono per una costante: infatti differiscono per una costante in un intorno di $\gamma(0)$, e due sollevamenti che coincidono in un punto coincidono lungo tutta la curva.

Teorema 1.5: *Sia Ω un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ammette una primitiva.*

Dimostrazione: Sia $\varphi\colon \Omega \to \mathcal{O}$ la sezione associata a f, cioè $\varphi(z) = \mathbf{f}_z$. Essendo $d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ un rivestimento e Ω semplicemente connesso, esiste un sollevamento $\Phi\colon \Omega \to \mathcal{O}$ di φ rispetto a d, cioè $d \circ \Phi = \varphi$. Siccome $p \circ d = p$, anche Φ è una sezione di $\mathcal{O}$ su Ω; sia $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ la funzione olomorfa corrispondente. Allora chiaramente $F' = f$ su Ω. □

Corollario 1.6: *Sia Ω un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$, e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla. Allora esiste una $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $f = \exp(g)$. Inoltre, g è univocamente determinata a meno di costanti additive della forma $2\pi k i$ con $k \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione: Sia φ una primitiva di f'/f. Abbiamo

$$\frac{d}{dz}(fe^{-\varphi}) = (f' - f\varphi')e^{-\varphi} = 0,$$

per cui $fe^{-\varphi}$ è una costante $e^\alpha \neq 0$, e quindi $f = \exp(\varphi + \alpha)$. Poi $\exp(g_1) = \exp(g_2)$ sse $\exp(g_1 - g_2) \equiv 1$ sse $g_1 - g_2 = 2k\pi i$. □

Corollario 1.7: *Sia Ω un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla, e $n \in \mathbb{Z}^*$. Allora esiste una $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $f = h^n$. Inoltre, h è univocamente determinata a meno di costanti moltiplicative della forma $e^{2\pi k i/n}$ con $k \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione: Se $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ è tale che $f = \exp(g)$, basta prendere $h = \exp(g/n)$. Poi $h_1^n = h_2^n$ sse $(h_1/h_2)^n \equiv 1$ sse $h_1/h_2 \equiv e^{2\pi k i/n}$. □

Concludiamo questo paragrafo con una caratterizzazione delle funzioni che ammettono una primitiva senza assumere la semplice connessione del dominio.

Proposizione 1.8: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Allora f ammette una primitiva olomorfa in Ω sse*

$$\int_\gamma f\,dz = 0 \tag{1.1}$$

per ogni curva chiusa differenziabile a tratti in Ω. In particolare, f è quindi olomorfa.

Dimostrazione: Supponiamo esista $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $F' = f$. Allora se $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ è differenziabile a tratti e $\gamma(a) = \gamma(b)$ abbiamo

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d(F\circ\gamma)}{dt}\,dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) = 0.$$

Viceversa, supponiamo che f soddisfi (1.1); in particolare, il Teorema di Morera implica che f è olomorfa. Fissiamo $a \in \Omega$ e per ogni $w \in \Omega$ scegliamo una curva γ_w differenziabile a tratti che collega a con w. Poniamo

$$F(w) = \int_{\gamma_w} f\,dz.$$

Grazie alla (1.1), $F(w)$ dipende solo da w e non dalla curva γ_w scelta; dobbiamo dimostrare che $F' = f$.

Sia $w_0 \in \Omega$, e $D(w_0, r) \subset \Omega$. Se $w \in D(w_0, r)$, poniamo $w' = \operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w_0$, e indichiamo con λ_w la curva costituita dal segmento collegante w_0 a w' seguita dal segmento collegante w' a w. In particolare, la curva costituita da γ_{w_0} seguita da λ_w è una curva differenziabile a tratti che collega a con w; quindi

$$F(w) - F(w_0) = \int_{\lambda_w} f\,dz.$$

Sia ora $h \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$\frac{F(w+ih) - F(w)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\lambda_{w+ih}} f\,dz - \int_{\lambda_w} f\,dz\right] = \frac{i}{h}\int_{\operatorname{Im} w}^{\operatorname{Im} w + h} f(\operatorname{Re} w + it)\,dt,$$

per cui $\partial F/\partial y$ esiste, ed è uguale a if.

Analogamente, se poniamo $w'' = \operatorname{Re} w_0 + i \operatorname{Im} w$ e indichiamo con μ_w la curva costituita dal segmento collegante w_0 a w'' seguita dal segmento collegante w'' a w, (1.1) ci assicura che

$$\int_{\lambda_w} f\,dz = \int_{\mu_w} f\,dz;$$

quindi ripetendo il ragionamento precedente troviamo che $\partial F/\partial x$ esiste ed è uguale a f. Quindi F soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann, per cui è olomorfa e $F' = f$, come volevamo. □

Come conseguenza abbiamo il seguente risultato, che ci servirà più avanti:

Proposizione 1.9: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, e a, b due punti appartenenti alla stessa componente connessa di $\mathbb{C}\setminus\Omega$. Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che*

$$e^{f(z)} = \frac{z-a}{z-b}$$

in Ω.

Dimostrazione: Poniamo $g(z) = (z-a)/(z-b)$; in particolare, $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Sia γ una curva chiusa in Ω; allora

$$\int_\gamma \frac{g'}{g}\,dz = \int_\gamma \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) dz = 2\pi i\big(n(\gamma,a) - n(\gamma,b)\big) = 0$$

grazie al Teorema 0.25 (in quanto le componenti connesse di $\mathbb{C}\setminus\Omega$ sono contenute nelle componenti connesse di $\mathbb{C}\setminus \operatorname{Im}\gamma$). Dunque la Proposizione 1.8 ci fornisce una primitiva $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ di g'/g.

Ora

$$\frac{d}{dz}\big(e^{-h(z)}g(z)\big) = e^{-h(z)}\big(-h'(z)g(z) + g'(z)\big) = 0;$$

quindi $e^{-h}g \equiv \alpha$, dove α è costante non nulla su ogni componente connessa di Ω. Allora $f = h + c$, dove $c \in \mathbb{C}$ è tale che $e^c = \alpha$, è come richiesto. □

Esercizio 1.6. Un germe $\mathbf{f}_a \in \mathcal{O}$ si dice *prolungabile* in un dominio Ω se è prolungabile lungo qualunque curva $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ con $\gamma(0) = a$. Dimostra che se Ω è semplicemente connesso allora un germe $\mathbf{f}_a$ è prolungabile sse esiste una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che (Ω, f) è un rappresentante di $\mathbf{f}_a$.

Esercizio 1.7. Sia $f\colon \Delta \to \Omega$ un rivestimento con $f(0) = z_0$. Dimostra che per ogni germe $\mathbf{g}_{z_0} \in \mathcal{O}$ prolungabile in Ω esiste una $G \in \mathcal{O}(\Delta)$ tale che $\mathbf{g}_{z_0} \circ \mathbf{f}_0 = \mathbf{G}_0$ (uguaglianza di germi). In altre parole, f "uniformizza" ogni germe prolungabile (nel secolo scorso le funzioni analitiche erano i germi prolungabili...).

2. Teoremi di Hurwitz

Questa sezione è dedicata a una serie di teoremi collegati fra loro riguardanti proprietà che si conservano facendo il limite di una successione di funzioni olomorfe. Ricordo che sullo spazio delle funzioni olomorfe considereremo in genere la topologia della convergenza uniforme sui compatti (cioè la topologia compatta-aperta), che comunque è equivalente in questo caso a quella della convergenza puntuale (o anche della convergenza puntuale su un aperto, per il Teorema di Vitali). Inoltre, il Teorema di Weierstrass ci assicura che il limite di funzioni olomorfe è una funzione olomorfa e che, se $f_n \to f$, anche tutte le derivate delle f_n convergono alle corrispondenti derivate di f.

I teoremi che ci interessano sono tutti conseguenza della seguente versione semplificata del *Teorema di Rouché:*

Proposizione 2.1: *Siano f e g funzioni olomorfe in un intorno di un disco chiuso $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ e tali che $|f-g| < |g|$ on ∂D. Allora f e g hanno lo stesso numero di zeri (contati con le relative moltepicità) in D.*

Dimostrazione: Poniamo $f_t = g + t(f-g)$ for $t \in [0,1]$. Allora su ∂D abbiamo

$$0 < |g(z)| - |f(z) - g(z)| \leq |g(z)| - t|f(z) - g(z)| \leq |f_t(z)|.$$

Sia a_t il numero di zeri di f_t in D. Per il principio dell'argomento,

$$a_t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f_t'(\zeta)}{f_t(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{g'(\zeta)+t\bigl(f'(\zeta)-g'(\zeta)\bigr)}{g(\zeta)+t\bigl(f(\zeta)-g(\zeta)\bigr)}\,d\zeta.$$

Dunque a_t è un intero che dipende in modo continuo da t — e quindi è costante. In particolare, a_0, il numero di zeri di g, è uguale ad a_1, il numero di zeri di f. □

Una prima conseguenza è:

Corollario 2.2: *Sia $f \in \mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ tale che $f(\Delta) \subset\subset \Delta$. Allora f ha un punto fisso.*

Dimostrazione: Sia $r<1$ tale che $|f(z)|<r$ per ogni $z\in\Delta$. Allora su $\partial\Delta_r$ si ha

$$\bigl|z-\bigl(z-f(z)\bigr)\bigr| = |f(z)| < r = |z|,$$

e quindi possiamo applicare la Proposizione 2.1 a id_Δ e $\mathrm{id}_\Delta - f$, trovando uno zero di quest'ultima (ovvero un punto fisso di f) in Δ_r. □

Proseguiamo col primo *Teorema di Hurwitz:*

Teorema 2.3: *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, e $\{f_n\}\subset\mathcal{O}(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti a una $f\in\mathcal{O}(\Omega)$. Supponiamo che f non sia costante. Allora per ogni $z\in\Omega$ possiamo trovare $n_1=n_1(z)\in\mathbb{N}$ e punti $z_n\in\Omega$ per $n\ge n_1$ tali che*

$$\forall n\ge n_1 \qquad f_n(z_n)=f(z)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Dimostrazione: Scelto $z\in\Omega$, poniamo $w=f(z)$. Essendo f non costante (e olomorfa), l'insieme $f^{-1}(w)$ è composto da punti isolati, per cui possiamo trovare $\delta>0$ tale che se $0<|\zeta-z|\le\delta$ allora $\zeta\in\Omega$ e $f(\zeta)\ne w$.

Per ogni $k>0$ sia γ_k la circonferenza di centro z e raggio δ/k, e poniamo

$$\delta_k = \min\bigl\{|f(\zeta)-w| \bigm| \zeta\in\gamma_k\bigr\} > 0.$$

Infine, scegliamo $n_k\ge 1$ tale che

$$\forall n\ge n_k \qquad \max_{\zeta\in\gamma_k}|f_n(\zeta)-f(\zeta)| < \frac{\delta_k}{2};$$

possiamo anche supporre che $n_1<n_2<\cdots$.

Fissato $k\ge1$, se $n\ge n_k$ e $\zeta\in\gamma_k$ si ha

$$\bigl|\bigl(f_n(\zeta)-w\bigr)-\bigl(f(\zeta)-w\bigr)\bigr| < \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \le |f(\zeta)-w|;$$

quindi per la Proposizione 2.1 le funzioni $f_n(\zeta)-w$ e $f(\zeta)-w$ hanno lo stesso numero di zeri all'interno di γ_k. In particolare, dunque, $f_n(\zeta)-w$ ha uno zero all'interno di γ_k non appena $n\ge n_k$.

Dunque possiamo definire z_n per $n\ge n_1$ in questo modo: se $n_k\le n<n_{k+1}$, sia z_n un punto all'interno di γ_k tale che $f_n(z_n)=w$. Chiaramente, $z_n\to z$, e ci siamo. □

Corollario 2.4: (Hurwitz) *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, e $\{f_n\}\subset\mathcal{O}(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti a una $f\in\mathcal{O}(\Omega)$. Se $f_n(z)\ne0$ per ogni $n\ge1$ e $z\in\Omega$, allora o $f\equiv0$ oppure $f(z)\ne0$ per ogni $z\in\Omega$. Più in generale, se $f_n(z)\ne w_0$ per ogni $n\ge1$ e $z\in\Omega$, allora o $f\equiv w_0$ oppure $f(z)\ne w_0$ per ogni $z\in\Omega$.*

Dimostrazione: Se f è costante non c'è nulla da dimostrare. Se f non è costante, il Teorema 2.3 ci dice che ogni $w_0\in f(\Omega)$ è nell'immagine delle f_n per n abbastanza grande, e ci siamo. □

Ma forse ancora più impressionante è il seguente

Corollario 2.5: (Hurwitz) *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, e $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti a una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora se ogni f_n è iniettiva ne segue che f è iniettiva o costante.*

Dimostrazione: Supponiamo che si abbia $f(z_1) = f(z_2)$ per qualche $z_1 \neq z_2 \in \Omega$. Consideriamo le funzioni $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ e $h(z) = f(z) - f(z_2)$. Chiaramente, $h_n \to h$ e, essendo le f_n iniettive, le h_n non hanno zeri. Ma $h(z_1) = 0$; il Corollario 2.4 ci assicura allora che $h \equiv 0$, cioè f è costante. □

Esercizio 2.1. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, e $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti a una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supponiamo che le f_n siano iniettive, e f non costante. Sia U un aperto contenuto in $f(\Omega)$ e in tutti gli $f_n(\Omega)$. Dimostra che $f_n^{-1} \to f^{-1}$ in U.

Esercizio 2.2. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, e $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe convergente uniformemente sui compatti a una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dimostra che se le f_n' non hanno zeri in Ω, allora o f è costante oppure $f' \neq 0$ su Ω.

3. Il lemma di Schwarz e il teorema di Wolff-Denjoy

We begin with *Schwarz's lemma*:

Theorem 3.1: *Let $f\colon \Delta \to \Delta$ be a holomorphic function such that $f(0) = 0$. Then*

$$\forall z \in \Delta \qquad |f(z)| \le |z| \tag{3.1}$$

and

$$|f'(0)| \le 1. \tag{3.2}$$

Moreover, equality in (3.1) *for some non-zero z or in* (3.2) *occurs iff there is $\theta \in \mathbb{R}$ such that $f(z) = e^{i\theta} z$ for all $z \in \Delta$.*

Dimostrazione: Since $f(0) = 0$, we can define a function $g\colon \Delta \to \mathbb{C}$ by setting $g(z) = f(z)/z$. If $z \in \Delta$ and we pick $|z| < r < 1$, then by the maximum principle

$$|g(z)| \le \sup_{|w|=r} |g(w)| = \sup_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \le \frac{1}{r}.$$

Letting $r \to 1$ we get $|g(z)| \le 1$, that is (3.2) and (3.1) (for $g(0) = f'(0)$). If equality holds in (3.2) or in (3.1) for some non-zero z, then, again by the maximum principle, g is constant, and the last assertion follows. □

The first application of Schwarz's lemma is the computation of the automorphism group of Δ:

Proposition 3.2: *Every automorphism $\gamma\colon \Delta \to \Delta$ of Δ is of the form*

$$\gamma(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a} z} \tag{3.3}$$

for some $\theta \in \mathbb{R}$, where $a = \gamma^{-1}(0) \in \Delta$. In particular, every $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ extends continuously to a homeomorphism of $\overline{\Delta}$ onto itself.

Dimostrazione: First of all, every γ given by (3.3) is an automorphism of Δ. Indeed,

$$1 - |\gamma(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{a} z|^2}, \tag{3.4}$$

and so $\gamma(\Delta) \subset \Delta$; furthermore,

$$\gamma^{-1}(z) = e^{-i\theta} \frac{z + a e^{i\theta}}{1 + \overline{a} e^{-i\theta} z}$$

is the inverse of γ.

Let Γ be the set composed by the automorphisms of type (3.3); it is easy to check that Γ is a group, acting transitively on Δ. Therefore if γ is another automorphism of Δ, there exists $\gamma_1 \in \Gamma$ such that $\gamma_1 \circ \gamma(0) = 0$; hence it suffices to show that every automorphism γ of Δ leaving 0 fixed is of the form $\gamma(z) = e^{i\theta} z$ for some $\theta \in \mathbb{R}$, and thus belongs to Γ. But if we apply (3.2) to γ and γ^{-1}, we see that $|\gamma'(0)| = 1$, and the assertion follows from Schwarz's lemma. □

Esercizio 3.1. Dimostra che per ogni σ_1, σ_2, τ_1, $\tau_2 \in \partial\Delta$ con $\sigma_1 \neq \sigma_2$ e $\tau_1 \neq \tau_2$ esiste $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tale che $\gamma(\sigma_1) = \tau_1$ e $\gamma(\sigma_2) = \tau_2$.

Using the automorphism group of Δ we can express Theorem 3.1 in a more invariant form:

Corollary 3.3: *Let $f\colon \Delta \to \Delta$ be holomorphic. Then*

$$\forall z, w \in \Delta \qquad \left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \le \left|\frac{z - w}{1 - \overline{w}z}\right|, \tag{3.5}$$

and

$$\forall z \in \Delta \qquad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \le \frac{1}{1 - |z|^2}. \tag{3.6}$$

Moreover, equality in (3.5) *for some $z \neq w \in \Delta$ or in* (3.6) *for some $z \in \Delta$ occurs iff $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.*

Dimostrazione: Fix $w \in \Delta$, and let γ_1, $\gamma_2 \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ be given by

$$\gamma_1(z) = \frac{z + w}{1 + \overline{w}z} \qquad \text{and} \qquad \gamma_2(z) = \frac{z - f(w)}{1 - \overline{f(w)}z}.$$

Then the assertion follows applying Schwarz's lemma to $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$. □

Esercizio 3.2. Dimostra che ogni $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ diverso dall'identità ha al più un solo punto fisso.

Un altro modo per esprimere il Lemma di Schwarz è tramite la *distanza di Poincaré* $\omega\colon \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}^+$ definita da

$$\omega(z, w) = \operatorname{atanh}\left|\frac{z - w}{1 - \overline{w}z}\right| = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|}{1 - \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|}.$$

Questa distanza è indotta dalla *metrica di Poincaré*

$$d\kappa_z^2 = \frac{dz\, d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2},$$

che è una metrica kähleriana di curvatura gaussiana costante -4. Indipendentemente da ciò, è facile verificare a mano che ω è una distanza completa su Δ.

Esercizio 3.3. Dimostra che ω è una vera distanza su Δ. (*Suggerimento:* usa la transitività di $\mathrm{Aut}(\Delta)$ per semplificare i conti.)

Esercizio 3.4. Dimostra che la *palla aperta di Poincaré* $B_\omega(z_0, r) = \{\omega(z, z_0) < r\}$ è data dal disco euclideo di centro

$$\tilde{z}_0 = \frac{1 - (\tanh r)^2}{1 - (\tanh r)^2 |z_0|^2}\, z_0$$

e raggio

$$\rho = \frac{(\tanh r)(1 - |z_0|^2)}{1 - (\tanh r)^2 |z_0|^2} < 1 - |\tilde{z}_0|.$$

In particolare, le palle chiuse sono compatte, per cui ω è una distanza completa.

Esercizio 3.5. Una *geodetica* per ω è una curva $\gamma\colon (-\infty, +\infty) \to \Delta$ tale che

$$\omega\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) = |t_1 - t_2|$$

per ogni t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Dimostra che i raggi

$$t \mapsto \tanh(t)\frac{z_0}{|z_0|}$$

sono geodetiche per l'origine (e le sole, se uno sa che ω deriva da una metrica kähleriana). Usando $\mathrm{Aut}(\Delta)$, dimostra che le altre geodetiche sono (pezzi di) circonferenze euclidee ortogonali a $\partial\Delta$.

We may now rephrase Corollary 3.3, obtaining the *Schwarz-Pick lemma*:

Corollary 3.4: *Let $f\colon \Delta \to \Delta$ be holomorphic. Then*

$$\forall z, w \in \Delta \qquad \omega\big(f(z), f(w)\big) \le \omega(z, w). \tag{3.7}$$

Moreover, equality in (3.7) *for some $z \ne w \in \Delta$ occurs iff $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.*

Dimostrazione: Since $\frac{1}{2}\log[(1+t)/(1-t)]$ is strictly increasing in t, (3.7) is exactly (3.5), and the assertion follows. □

So we have constructed a distance on Δ which is contracted by holomorphic functions.

We introduce another model of the unit disk, the *upper half-plane* $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$. The *Cayley transform* is the function $\Psi\colon \Delta \to H^+$ given by

$$\Psi(z) = i\,\frac{1+z}{1-z}. \tag{3.8}$$

It is easily verified that Ψ is a biholomorphism between Δ and H^+, with inverse

$$\Psi^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i}.$$

If we imbed H^+ in $\hat{\mathbb{C}}$, then Ψ extends to a homeomorphism of $\overline{\Delta}$ with $\overline{H^+}$, sending 1 in ∞, 0 in i and -1 in 0.

Using the Cayley transform, we can transfer the Poincaré distance from Δ to H^+. The *Poincaré distance* on H^+ is given by

$$\omega(w_1, w_2) = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \left|\dfrac{w_1 - w_2}{w_1 - \overline{w_2}}\right|}{1 - \left|\dfrac{w_1 - w_2}{w_1 - \overline{w_2}}\right|}. \tag{3.9}$$

Again, a holomorphic map $f\colon H^+ \to H^+$ contracts the Poincaré distance, that is

$$\forall w_1, w_2 \in H^+ \qquad \left|\frac{f(w_1) - f(w_2)}{f(w_1) - \overline{f(w_2)}}\right| \le \left|\frac{w_1 - w_2}{w_1 - \overline{w_2}}\right|, \tag{3.10}$$

with equality for some $w_1 \ne w_2 \in H^+$ iff $f \in \mathrm{Aut}(H^+)$.

We can also compute $\mathrm{Aut}(H^+)$:

Proposition 3.5: *Every automorphism $\gamma\colon H^+ \to H^+$ of H^+ is of the form*

$$\gamma(w) = \frac{aw+b}{cw+d}, \tag{3.11}$$

for some a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ such that $ad - bc = 1$.

Dimostrazione: γ is an automorphism of H^+ iff $\Psi^{-1} \circ \gamma \circ \Psi$ is an automorphism of Δ. Plugging the Cayley transform into (3.3) we find exactly (3.11), with a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ satisfying $D = ad - bc > 0$. But now if we divide a, b, c and d by $\sqrt{D}$ we can express γ in the form (3.11) with coefficients satisfying $ad - bc = 1$. □

The upper half-plane model is sometimes useful to understand questions regarding the behavior of geometrical objects at a point of the boundary. For instance, the Cayley transform sends the geodesics ending at $1 \in \partial\Delta$ into the vertical lines in H^+, quite a simpler object. On the other hand, the study of objects linked to internal points may be formally easier in Δ than in H^+. For instance, the isotropy group of i in H^+ is the composed by the automorphisms of the cumbersome form

$$\gamma(w) = \frac{w\cos\theta - \sin\theta}{w\sin\theta + \cos\theta}.$$

Abbiamo menzionato prima che una $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ può avere al massimo un punto fisso, se non è l'identità. Per gli automorfismi abbiamo un risultato più preciso:

Proposition 3.6: *Let* $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, $\gamma \ne \mathrm{id}_\Delta$. *Then either*

(i) γ *has a unique fixed point in* Δ, *or*

(ii) γ *has a unique fixed point in* $\partial\Delta$, *or*

(iii) γ *has two distinct fixed points in* $\partial\Delta$.

Dimostrazione: Write

$$\gamma(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z},$$

for some $\theta \in \mathbb{R}$ and $z_0 \in \Delta$. The equation satisfied by the fixed points of γ is

$$\overline{z_0}z^2 + (e^{i\theta} - 1)z - z_0 = 0. \tag{3.12}$$

If $z_0 = 0$, then $\gamma(z) = e^{i\theta}z$ and we are in the first case. If $z_0 \ne 0$, then (3.12) has (counting multiplicities) exactly two roots, z_1 and z_2. Moreover,

$$|z_1||z_2| = |z_0/\overline{z_0}| = 1.$$

Therefore either just one of them is in Δ — and we are again in case (i) —, or both are in $\partial\Delta$, and we are either in case (ii) or (iii). □

An automorphism of Δ different from the identity is called *elliptic* if it has a (unique) fixed point in Δ, *parabolic* if it has a unique fixed point on $\partial\Delta$, *hyperbolic* if it has two distinct fixed points on $\partial\Delta$.

L'esempio tipico di automorfismo ellittico è la rotazione $\gamma(z) = e^{i\theta}z$. Per avere esempi tipici di automorfismi parabolici e iperbolici conviene traslocare in H^+. Sia $\gamma \in \mathrm{Aut}(H^+)$ parabolico; grazie all'Esercizio 3.1, possiamo supporre che il punto fisso di γ sia ∞. Ricordando (3.11), $\gamma(\infty) = \infty$ sse $c = 0$; l'assenza di altri punti fissi forza $a/d = 1$, per cui

$$\gamma(w) = w + b$$

è l'esempio tipico di automorfismo parabolico (con $b \ne 0$).

Infine, se $\gamma \in \mathrm{Aut}(H^+)$ è iperbolico, possiamo supporre che i punti fissi siano 0 e ∞. Quindi $c = 0 = b$, e

$$\gamma(w) = \lambda w$$

è l'esempio tipico di automorfismo iperbolico (con $\lambda \ne 0, 1$).

Esercizio 3.6. Sia $\tau \in \partial\Delta$. Dimostra che tutti gli automorfismi parabolici di Δ con punto fisso τ sono della forma

$$\gamma(z) = \sigma_0 \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z} \tag{3.13}$$

dove

$$\sigma_0 = \frac{2 - ic}{2 + ic} \qquad \text{e} \qquad z_0 = \frac{ic}{2 - ic}\tau$$

per qualche $c \in \mathbb{R}$.

The original Schwarz lemma said something about functions $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ with a fixed point. Negando questo, otteniamo un altro risultato utile. Per enunciarlo correttamente, dobbiamo introdurre un nuovo concetto. L'*orociclo* $E(\tau, R)$ di *centro* $\tau \in \partial\Delta$ e *raggio* $R > 0$ è l'insieme

$$E(\tau, R) = \left\{ z \in \Delta \;\middle|\; \frac{|\tau - z|^2}{1 - |z|^2} < R. \right\}.$$

Geometricamente, si tratta di un disco euclideo di raggio $R/(1 + R)$ tangente a $\partial\Delta$ in τ, ottenuto come limite di palle di Poincaré con raggio euclideo costante e centro che tendeva a τ.

Bene; il *lemma di Wolff* ci dice che per funzioni senza punti fissi gli orocicli si comportano come palle di Poincaré:

Theorem 3.7: *Let $f\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ be without fixed points. Then there is a unique $\tau\in\partial\Delta$ such that for all $z\in\Delta$*
$$\frac{|\tau-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\le\frac{|\tau-z|^2}{1-|z|^2},\tag{3.14}$$
that is
$$\forall R>0\qquad f\bigl(E(\tau,R)\bigr)\subset E(\tau,R).\tag{3.15}$$
Moreover, the equality in (3.14) *holds at one point (and hence everywhere) iff f is a parabolic automorphism of Δ leaving τ fixed.*

Dimostrazione: For the uniqueness, assume that (3.15) holds for two distinct points τ, $\tau_1\in\partial\Delta$. Then we can construct two horocycles, one centered at τ and the other centered at τ_1, tangent to each other at a point of Δ. By (3.15) this point would be a fixed point of f, contradiction.

For the existence, pick a sequence $\{r_\nu\}\subset(0,1)$ with $r_\nu\to1$, and set $f_\nu=r_\nu f$. Then $f_\nu(\Delta)$ is relatively compact in Δ; by Corollary 2.2 each f_ν has a unique fixed point $w_\nu\in\Delta$. Up to a subsequence, we can assume $w_\nu\to\tau\in\overline{\Delta}$. If τ were in Δ, we would have
$$f(\tau)=\lim_{\nu\to\infty}f_\nu(w_\nu)=\lim_{\nu\to\infty}w_\nu=\tau,$$
which is impossible; therefore $\tau\in\partial\Delta$.

Now, by Schwarz's lemma
$$1-\left|\frac{f_\nu(z)-w_\nu}{1-\overline{w_\nu}f_\nu(z)}\right|^2\ge1-\left|\frac{z-w_\nu}{1-\overline{w_\nu}z}\right|^2,$$
or, equivalently,
$$\frac{|1-\overline{w_\nu}f_\nu(z)|^2}{1-|f_\nu(z)|^2}\le\frac{|1-\overline{w_\nu}z|^2}{1-|z|^2}.$$
Taking the limit as $\nu\to\infty$ we get (3.14), as we want.

Usando l'Esercizio 3.6 è facile verificare che per automorfismi parabolici che lasciano τ fisso l'uguaglianza in (3.14) vale identicamente. Viceversa, riscriviamo (3.14) come
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\tau+f(z)}{\tau-f(z)}-\frac{\tau+z}{\tau-z}\right)\le0.$$
Grazie al principio del massimo per la parte reale di funzioni olomorfe l'uguaglianza in un punto implica l'esistenza di $c\in\mathbb{R}$ tale che
$$\frac{\tau+f(z)}{\tau-f(z)}=\frac{\tau+z}{\tau-z}+ic.$$
Risolvendo si trova (3.13), ed è fatta. □

Sia ora $f\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ diversa dall'identità. Diremo *punto di Wolff* di f il punto $\tau(f)\in\overline{\Delta}$ dato dal punto fisso di f se ne ha uno, e dal punto τ del Teorema 3.7 se f non ha punti fissi in Δ. Un modo per unificare l'enunciato del lemma di Schwarz e del lemma di Wolff è il seguente:

Corollario 3.8: *Sia $f\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ diversa dall'identità, e $\tau\in\overline{\Delta}$ il suo punto di Wolff. Allora*
$$\frac{|1-\overline{\tau}f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\le\frac{|1-\overline{\tau}z|^2}{1-|z|^2}.$$

Dimostrazione: Se f non ha punti fissi, questo è esattamente il lemma di Wolff. Se invece f ha un punto fisso τ, l'asserzione segue da (3.5) ponendo $w=\tau$. □

Come applicazione vogliamo studiare la teoria dell'iterazione sul disco. Cominciamo con una semplice osservazione:

Lemma 3.9: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, e $f \in \mathrm{Hol}(\Omega,\Omega)$. Then id_Ω can be a limit point of $\{f^k\}$ only if $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.*

Dimostrazione: Assumiamo che $f^{k_\nu} \to \mathrm{id}_\Omega$. Obviously, f is one-to-one. Take $z_0 \in \Omega$: by il Teorema 2.3, $z_0 \in f^{k_\nu}(\Omega) \subset f(\Omega)$ for all ν large enough, and so f is onto. □

Da questo segue:

Proposizione 3.10: *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ un dominio limitato, and $f \in \mathrm{Hol}(\Omega,\Omega)$. Let $h \in \mathrm{Hol}(\Omega,\mathbb{C})$ be a limit point of the sequence $\{f^k\}$. Then either*
(i) *h is a constant $z_0 \in \overline{\Omega}$, or*
(ii) *h is an automorphism of Ω. In this case, $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ too.*

Dimostrazione: Write $h = \lim\limits_{\nu\to\infty} f^{k_\nu}$, and set $m_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$. By Montel's Theorem, up to a subsequence we can assume that $\{f^{m_\nu}\}$ converges to a holomorphic map $g \in \mathrm{Hol}(\Omega,\mathbb{C})$. Suppose h is not constant; then $h(\Omega)$ is open in Ω. Now, for any $z \in \Omega$ we have

$$g\big(h(z)\big) = \lim_{\nu\to\infty} f^{m_\nu}\big(f^{k_\nu}(z)\big) = \lim_{\nu\to\infty} f^{k_{\nu+1}}(z) = h(z);$$

therefore g is the identity on the open subset $h(\Omega)$ of Ω. Hence $g = \mathrm{id}_\Omega$; by Lemma 3.9, f is an automorphism. Finally, it is easy to show that a subsequence of $\{f^{-k_\nu}\}$ converges to h^{-1}. □

Ci servirà anche il seguente fatto topologico:

Esercizio 3.7. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e sia $\{x_n\} \subset X$ tale che $\overline{\{x_n\}}$ sia compatto. Supponiamo inoltre che esista $\tilde{x} \in X$ tale che ogni sottosuccessione convergente di $\{x_n\}$ converga a $\tilde{x}$. Dimostra che $x_n \to \tilde{x}$.

We are now ready to prove the fundamental *Wolff-Denjoy theorem:*

Theorem 3.11: *Let $f \in \mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$, and assume f is neither an elliptic automorphism nor the identity. Then the sequence of iterates $\{f^k\}$ converges, uniformly on compact sets, to the Wolff point $\tau(f) \in \overline{\Delta}$ of f.*

Dimostrazione: Assumiamo prima che $\tau(f) \in \Delta$; a meno di automorfismi possiamo supporre che $\tau(f) = 0$. Siccome f non è un automorfismo ellittico, il lemma di Schwarz ci dice che $|f(z)| < |z|$ per ogni $z \in \Delta$; quindi $|f^n(z)| < |z|^n \to 0$, e $f^n \to 0$ uniformemente sui compatti.

If f is a parabolic automorphism, then transfering everything on H^+ it becomes clear that $f^k \to \tau(f)$, the unique fixed point of f. If f is a hyperbolic automorphism, then, moving again to H^+, we can assume $f(w) = \lambda w$ for some $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \neq 1$. Then the Wolff point of f is 0 or ∞ according to $\lambda < 1$ or $\lambda > 1$, and thus $f^k \to \tau(f)$.

So assume now that $f \notin \mathrm{Aut}(\Delta)$. Notiamo prima di tutto che, per il Teorema di Montel, la chiusura di $\{f^k\}$ in $\mathrm{Hol}(\Delta,\mathbb{C})$ è compatta; quindi ci basta dimostrare che l'unico punto limite della successione è la costante $\tau(f)$.

If $h = \lim\limits_{\nu\to\infty} f^{k_\nu}$ is a limit point of $\{f^k\}$ in $\mathrm{Hol}(\Delta,\mathbb{C})$, by Proposizione 3.10 h is a constant $\tau \in \overline{\Delta}$. If τ were an interior point of Δ, we would have

$$f(\tau) = \lim_{\nu\to\infty} f\big(f^{k_\nu}(\tau)\big) = \lim_{\nu\to\infty} f^{k_\nu}\big(f(\tau)\big) = \tau,$$

impossible; therefore $\tau \in \partial\Delta$.

We claim that $\tau = \tau(f)$. In fact, by Wolff's lemma for any $R > 0$ (and $\nu \in \mathbb{N}$) we have

$$f^{k_\nu}\big(E\big(\tau(f),R\big)\big) \subset E\big(\tau(f),R\big);$$

hence

$$\{\tau\} = h\big(E\big(\tau(f),R\big)\big) \subset \overline{E\big(\tau(f),R\big)} \cap \partial\Delta = \{\tau(f)\},$$

that is our claim. But thus $\tau(f)$ is the unique limit point of $\{f^k\}$, and we are done. □

Esercizio 3.8. Una $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ è detta *stellata* se $f(\Delta)$ è stellata rispetto a $f(0)$. Dimostra che se f è stellata e iniettiva allora $f(\Delta_r)$ è stellato per ogni $0 < r < 1$.

Esercizio 3.9. Sia $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ iniettiva. Dimostra che f è stellata sse $\mathrm{Re}(zf'/f) > 0$ su Δ.

Esercizio 3.10. Una $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ è detta *convessa* se $f(\Delta)$ è un insieme convesso. Sia $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ iniettiva. Dimostra che f è convessa sse $1 + \mathrm{Re}(zf''/f') > 0$ su Δ.

Esercizio 3.11. Sia $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ iniettiva, e poniamo $g(z) = zf'(z)$. Dimostra che f è convessa sse g è stellata.

4. I teoremi di Landau, Schottky e Picard

Scopo di questo paragrafo è descrivere la dimostrazione data da Landau del grande teorema di Picard.

Per ogni $R > 0$, indicheremo con $\Delta_R = R\Delta$ il disco aperto di centro l'origine e raggio R. Il *numero di Landau* L_f di una funzione $f \in \mathcal{O}(\Delta_R)$ è dato da

$$L_f = \sup\{r > 0 \mid f(\Delta_R) \text{ contiene un disco aperto di raggio } r\}.$$

Una prima stima del numero di Landau è data nel seguente lemma, dove $\|\cdot\|_\infty$ è la norma del sup.

Lemma 4.1: *Dato $R > 0$, sia $f \in \mathcal{O}(\Delta_R)$ tale che $f(0) = 0$. Allora $f(\Delta_R)$ contiene $\Delta_{R|f'(0)|^2/4\|f'\|_\infty}$.*

Dimostrazione: Chiaramente possiamo supporre $|f'(0)| > 0$. Sia $c \notin f(\Delta_R)$; per ipotesi, $c \neq 0$. Quindi la funzione $1 - f(z)/c$ è olomorfa e mai nulla in Δ_R; il Corollario 1.7 ci fornisce una $\psi \in \mathcal{O}(\Delta_R)$ tale che $\psi(0) = 1$ e

$$\psi(z)^2 = 1 - \frac{f(z)}{c}.$$

In particolare, $\psi'(0) = -f'(0)/2c$ e

$$|\psi(z)|^2 < 1 + \frac{\|f'\|_\infty R}{|c|},$$

in quanto $|f(z)| \le \|f'\|_\infty |z|$.

Ora scegliamo $0 < r < R$. La formula di Taylor ci dice che

$$\psi(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\psi^{(n)}(0) r^n e^{in\theta};$$

quindi

$$|\psi(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n,m=0}^\infty \frac{1}{n!m!}\psi^{(n)}(0)\overline{\psi^{(m)}(0)} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta},$$

e

$$1 + \frac{\|f'\|_\infty R}{|c|} > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n!)^2}|\psi^{(n)}(0)|^2 r^{2n} \ge 1 + \frac{|f'(0)|^2}{4|c|^2}\, r^2,$$

e quindi

$$|c| > \frac{r^2 |f'(0)|^2}{4\|f'\|_\infty R}.$$

Facendo tendere r verso R abbiamo la tesi. □

Per studiare meglio il numero di Landau è ovviamente necessario normalizzare R e $f'(0)$. Introduciamo allora la classe

$$\mathcal{R} = \bigl\{ f \in \mathcal{O}(\Delta) \bigm| f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 1 \bigr\}.$$

Il *numero di Landau* L è dato da

$$L = \inf\{L_f \mid f \in \mathcal{R}\} \ge 0.$$

Il risultato importante in questo caso è che $L > 0$, cioè che l'immagine di ogni funzione della classe $\mathcal{R}$ non può diventare più sottile di una costante universale:

Teorema 4.2: (Bloch-Landau) $L \geq 1/16$.

Nota: Questo si applica a qualunque funzione $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ con $f'(0) = 1$.
Nota: In realta si può dimostrare che $L \geq 1/2$.

Dimostrazione: Sia $f \in \mathcal{R}$. Fissato $r < 1$ poniamo

$$M(s) = \max_{|z|\leq s} |f'(z)|,$$

dove $0 \leq s \leq r$, e

$$\mu(s) = sM(r - s).$$

Chiaramente μ è continua, non-negativa, $\mu(0) = 0$ e $\mu(r) = r$. Poniamo

$$2R = \min\{s \mid \mu(s) = r\};$$

ovviamente, $0 < 2R \leq r$. Inoltre deve esistere $z_0 \in \Delta$ tale che

$$|z_0| = r - 2R \qquad \text{e} \qquad |f'(z_0)| = M(r - 2R) = r/2R.$$

La funzione $\varphi(z) = f(z + z_0) - f(z_0)$ è olomorfa in Δ_{2R}, in quanto

$$|z + z_0| \leq |z| + |z_0| < 2R + (r - 2R) = r.$$

Abbiamo $\varphi(0) = 0$ e $|\varphi'(0)| = |f'(z_0)| = r/2R$; ora ci serve una stima su $\|\varphi'\|_\infty$. Se $|z| < R$ chiaramente $|z + z_0| < r - R$ e quindi

$$|\varphi'(z)| = |f'(z + z_0)| \leq M(r - R) = \frac{\mu(R)}{R} < \frac{r}{R}.$$

Applicando il Lemma 4.1 troviamo quindi che $\varphi(\Delta_R)$ contiene un disco di raggio

$$\frac{R(r/2R)^2}{4r/R} = \frac{r}{16}.$$

Dunque anche $f(\Delta)$ contiene un disco di raggio $r/16$; facendo tendere r a 1 abbiamo la tesi. □

Da questo risultato seguono tutta una serie di conseguenze riguardanti funzioni olomorfe a valori in $\mathbb{C}$ meno due punti. Se $a \neq b \in \mathbb{C}$ poniamo $\Omega_{a,b} = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. Ci servirà il

Lemma 4.3: *Sia Ω un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$ contenente l'origine, e sia $f\colon \Omega \to \Omega_{0,1}$ olomorfa. Allora esiste $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che*

$$f = -\exp\bigl(\pi i \cosh(2g)\bigr).$$

Inoltre:

(i) *$g(\Omega)$ non contiene alcun disco aperto di raggio 1.*
(ii) *Sia $K \subset\subset \Omega_{0,1}$ compatto. Allora esiste $c_0 = c_0(K) > 0$ tale che $f(0) \in K$ implica $|g(0)| < c_0$.*

Dimostrazione: Siccome f non ha zeri possiamo trovare $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che

$$f = \exp(2\pi i h);$$

siccome $1 \notin f(\Omega)$ anche h non è mai nulla per cui possiamo scegliere $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che

$$h = u^2.$$

Per lo stesso motivo, $1 \notin h(\Omega)$ e quindi possiamo trovare $v \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che

$$h = 1 + v^2.$$

Essendo $u^2 - v^2 \equiv 1$, possiamo infine trovare $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che

$$u - v = \exp(g).$$

Di conseguenza

$$u + v = \frac{1}{u - v} = \exp(-g)$$

e quindi $u = \cosh(g)$. Ne segue che

$$\cosh(2g) = 2\cosh^2 g - 1 = 2u^2 - 1,$$

per cui

$$2\pi i h = 2\pi i u^2 = \pi i \cosh(2g) + \pi i,$$

e infine

$$f = -\exp\bigl(\pi i \cosh(2g)\bigr).$$

Per dimostrare (i), consideriamo i punti della forma

$$b = \pm \log(\sqrt{m} + \sqrt{m+1}) + \tfrac{1}{2} n\pi i,$$

dove $m \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Questi punti formano i vertici di un reticolo rettangolare, di altezza $\pi/2 < \sqrt{3}$ e larghezza minore di 1. Come conseguenza, ciascun punto del piano dista meno di 1 da almeno un vertice del reticolo; ci basta quindi dimostrare che i vertici del reticolo non sono nell'immagine di g. Ma infatti se avessimo $g(z_0) = b$ troveremmo

$$\cosh\bigl(2g(z_0)\bigr) = \frac{1}{2}\bigl((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^2 + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^2\bigr) = 2m - 1,$$

e quindi

$$f(z_0) = -\exp\bigl((2m-1)\pi i\bigr) = 1,$$

impossibile.

Per dimostrare la (ii) dobbiamo fare una osservazione. Imponendo $\operatorname{Re} h(0) \in [0,1)$, $\operatorname{Re} u(0) \geq 0$, $\operatorname{Re} v(0) \geq 0$ e $\operatorname{Im} g(0) \in [0, 2\pi)$, tutte le funzioni coinvolte sono univocamente determinate; in particolare, $g(0)$ dipende solo da $f(0)$, per cui se $f(0)$ varia in un compatto K, $|g(0)|$ rimane limitata. □

Notiamo anche che

$$\bigl|\log|f|\bigr| = \bigl|\operatorname{Re}\bigl(\pi i \cosh(2g)\bigr)\bigr| = \pi \sinh\bigl(2|\operatorname{Re} g|\bigr)\bigl|\sin(2 \operatorname{Im} g)\bigr|. \tag{4.1}$$

Allora abbiamo il *Teorema di Schottky:*

Teorema 4.4: (Schottky) *Dato* $0 < r < 1$ *e* $a_0 \in \Omega_{0,1}$ *esiste* $c_0 = c_0(r, a_0)$ *tale che per ogni* $f\colon \Delta \to \Omega_{0,1}$ *olomorfa con* $f(0) = a_0$ *si ha*

$$\forall z \in \Delta_r \qquad |f(z)| < c_0.$$

Inoltre $c(r, a_0)$ *è limitato sui compatti di* $[0,1) \times \Omega_{0,1}$.

Dimostrazione: Sia g la funzione data dal Lemma 4.3, e scegliamo $r < R < 1$. Sia $z_0 \in \Delta_r$ tale che $g'(z_0) \neq 0$, e consideriamo la funzione

$$\psi(z) = \frac{g\bigl(z_0 + (1 - r/R)z\bigr)}{(1 - r/R)g'(z_0)}.$$

ψ è olomorfa in Δ_R, $\psi'(0) = 1$ e non contiene dischi di raggio $1/(1 - r/R)|g'(z_0)|$; quindi il Teorema di Bloch-Landau implica

$$|g'(z_0)| \leq \frac{16}{1 - r/R}.$$

Questo chiaramente vale anche se $|g'(z_0)| = 0$. Quindi se $z \in \Delta_r$ si ha

$$|g(z) - g(0)| = \left| \int_0^z g'(\zeta)\, d\zeta \right| \le \frac{16r}{1 - r/R}.$$

Facendo tendere R a 1 troviamo

$$\forall z \in \Delta_r \qquad |g(z)| < |g(0)| + \frac{16r}{1-r},$$

e quindi (4.1) implica

$$\forall z \in \Delta_r \qquad |f(z)| < \exp\left(\pi \sinh\left(2|g(0)| + \frac{32r}{1-r}\right)\right) = c_0(r, a_0).$$

L'asserzione sulla limitatezza nei compatti segue dal Lemma 4.3.(ii). □

Come conseguenza troviamo il *Teorema di Landau:*

Teorema 4.5: (Landau) *Dati $a_0 \in \Omega_{0,1}$ e $a_1 \in \mathbb{C}^*$ esiste un numero positivo $R(a_0, a_1) > 0$ tale che se esiste una $f \in \mathrm{Hol}(\Delta_r, \Omega_{0,1})$ con $f(0) = a_0$ e $f'(0) = a_1$ allora necessariamente $r \le R(a_0, a_1)$.*

Dimostrazione: La funzione $g(z) = f(rz)$ è olomorfa in Δ, $g(0) = a_0$ e

$$r|a_1| = |g'(0)| \le 2 \max_{|z|=1/2} |g(z)| \le 2c_0(1/2, a_0),$$

per il Teorema 4.4 e le disuguaglianze di Cauchy, per cui

$$r \le \frac{2}{|a_1|} c_0(1/2, a_0).$$

□

Da questo segue il *piccolo teorema di Picard:*

Teorema 4.6: (Picard) *Sia $f\colon \mathbb{C} \to \Omega_{a,b}$ olomorfa. Allora f è costante.*

Nota: $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

Dimostrazione: A meno di comporre con un'applicazione affine possiamo supporre $\Omega_{a,b} = \Omega_{0,1}$. Prendiamo una $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non costante. Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $a_0 = f(z_0) \ne 0, 1$ e $a_1 = f'(z_0) \ne 0$, e la tesi segue subito dal Teorema di Landau applicato alla coppia a_0, a_1. □

Dal Teorema di Schottky segue anche il *grande teorema di Picard.* Per $R > 0$ sia $\Delta_R^* = \Delta_R \setminus \{0\}$.

Teorema 4.7: (Picard) *Dato $R > 0$ sia $f \in \mathcal{O}(\Delta_R^*)$ con una singolarità essenziale in 0. Allora $f(\Delta_R^*)$ contiene tutti i punti di $\mathbb{C}$ con al più un'eccezione. In altre parole, se $f\colon \Delta_R^* \to \Omega_{a,b}$ è olomorfa, allora 0 non è una singolarità essenziale per f.*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che f abbia una singolarità essenziale in 0 e che $f(\Delta_R^*)$ non contenga due punti; a meno di sostituire f con $(f-a)/(b-a)$ possiamo supporre che $f(\Delta_R^*) \subseteq \Omega_{0,1}$.

Per il Teorema di Casorati-Weierstrass, $f(\Delta_r^*)$ è denso in $\mathbb{C}$ per ogni $0 < r \le R$; quindi possiamo trovare una successione $z_n \to 0$ tale che $|z_{n+1}| < |z_n| < Re^{-2\pi}$ e $1/3 \le |f(z_n)| \le 1/2$ per tutti gli $n \ge 0$.

Definiamo $g_n\colon \Delta \to \Omega_{0,1}$ ponendo

$$g_n(z) = f\big(z_n e^{2\pi i z}\big).$$

Chiaramente $|g_n(0)| = |f(z_n)|$ varia in un compatto di $\Omega_{0,1}$; per il Teorema di Schottky esiste $c_0 > 0$ indipendente da n tale che $|g_n(z)| \le c_0$ su $\overline{\Delta_{1/2}}$. In particolare questo succede se $z \in [-1/2, 1/2]$; quindi

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi] \qquad |f(z_n e^{i\theta})| \le c_0.$$

Per il principio del massimo otteniamo $|f(z)| \le c_0$ se $|z_{n+1}| \le |z| \le |z_n|$, e quindi $|f(z)| \le c_0$ se $0 < |z| \le |z_1|$. Ma questo chiaramente implica che l'origine è una singolarità rimovibile, contraddizione. □

Una successione di funzioni $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ è *divergente uniformemente sui compatti* se per ogni $K \subset\subset \Omega$ compatto e $M > 0$ esiste $n_0 \geq 0$ tale che $|f_n(z)| \geq M$ per ogni $z \in K$ ed $n \geq n_0$. Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ è detta *normale* se ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione che è o convergente o divergente uniformemente sui compatti.

Esercizio 4.1. Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ localmente normale, cioè tale che per ogni $a \in \Omega$ esista un intorno $U \subset \Omega$ tale che $\{f|_U \mid f \in \mathcal{F}\}$ sia una famiglia normale. Dimostra che $\mathcal{F}$ è una famiglia normale *tout-court.*

Esercizio 4.2. (*Teorema di Montel*) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Dimostra che $\mathrm{Hol}(\Omega, \Omega_{0,1})$ è una famiglia normale. (*Suggerimento:* basta dimostrare che è localmente normale. Dato $z_0 \in \Omega$, se esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}(z_0)\}$ limitata, si applichi il Teorema di Schottky; se invece $|f_n(z_0)| \to +\infty$, si applichi il Teorema di Hurwitz a $1/f_n$.)

Esercizio 4.3. Dato $R > 0$ sia $f \in \mathcal{O}(\Delta_R^*)$ con una singolarità essenziale in 0. Dimostra che la successione di funzioni $f_n(z) = f(z/2^n)$ non è normale nell'anello $\Omega = A(1/2, 2)$, dove è definita per n abbastanza grande. Deduci che esiste un punto $z_0 \in \Omega$ ed $\varepsilon > 0$ tale che $D(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ e la funzione f assume tutti i valori finiti, tranne al più uno, in infiniti dischi della forma $D(z_0/2^n, \varepsilon/2^n)$.

Esercizio 4.4. (Julia) Dato $R > 0$ sia $f \in \mathcal{O}(\Delta_R^*)$ con una singolarità essenziale in 0. Dimostra che esiste una semiretta p uscente da 0 tale che in ogni angolo di vertice l'origine contenente p la funzione f assume tutti i valori finiti, con l'eccezione al più di uno, infinite volte.

5. Funzioni univalenti

Parte della teoria precedente diventa particolarmente interessante nel caso di funzioni iniettive (che per motivi storici si chiamano *funzioni univalenti*). Saremo particolarmente interessati alle seguente classe di funzioni univalenti:

$$\mathcal{S} = \bigl\{f \in \mathcal{O}(\Delta) \bigm| f(0) = 0, f'(0) = 1, f \text{ iniettiva}\bigr\} \subset \mathcal{R},$$

che in un certo senso rappresenta, a meno di normalizzazione, tutte le funzioni olomorfe iniettive definite su Δ.

Esercizio 5.1. Dimostra che se $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ è iniettiva allora esistono $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}^*$ tali che $a + bf \in \mathcal{S}$.

Un esempio particolarmente importante di funzione della classe $\mathcal{S}$ è la funzione

$$f_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Siccome

$$f_0(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right],$$

è evidente che f_0 è iniettiva e che

$$f_0(\Delta) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z = 0, \mathrm{Re}\, z \leq -1/4\}. \tag{5.1}$$

Inoltre

$$f_0(z) = z\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = z \sum_{h,k=0}^{\infty} z^{h+k} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \tag{5.2}$$

per cui è chiaro che $f_0 \in \mathcal{S}$.

Esercizio 5.2. Dimostra che le funzioni $f_\theta(z) = e^{-i\theta} f_0(e^{i\theta} z)$ appartengono alla classe $\mathcal{S}$ qualunque sia $\theta \in \mathbb{R}$. Le funzioni f_θ sono dette *funzioni di Kœbe.*

Esercizio 5.3. Dato $z_0 \in \Delta$ e $f \in \mathcal{O}(\Delta)$, poniamo

$$(T_{z_0} f)(z) = \frac{1}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)} \left[f\left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}\right) - f(z_0)\right].$$

Dimostra che se f è iniettiva allora $T_{z_0} f \in \mathcal{S}$. La funzione $T_{z_0} f$ è detta *trasformata di Kœbe* di f in z_0.

Nel seguito ci servirà il seguente

Lemma 5.1: *Se $f \in \mathcal{S}$ allora esiste $g \in \mathcal{S}$ tale che*

$$\forall z \in \Delta \qquad g(z)^2 = f(z^2).$$

Dimostrazione: Scriviamo $f(z) = z\varphi(z)$, con $\varphi \in \mathcal{O}(\Delta)$. Essendo f iniettiva, $\varphi(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Delta$; quindi esiste $h \in \mathcal{O}(\Delta)$ tale che $\varphi = h^2$. Inoltre, essendo $\varphi(0) = 1$, possiamo supporre $h(0) = 1$. Poniamo $g(z) = zh(z^2)$. Allora

$$g(z)^2 = z^2 h(z^2)^2 = z^2\varphi(z^2) = f(z^2), \qquad g(0) = 0, \qquad g'(0) = h(0) = 1;$$

dobbiamo solo dimostrare che g è iniettiva. Supponiamo si abbia $g(z) = g(w)$; essendo f iniettiva, questo implica $z^2 = w^2$. Se fosse $z = -w$ avremmo $g(z) = -g(w)$ e quindi $g(z) = g(w) = 0$, che implica $z = w = 0$. □

Se $f \in \mathcal{S}$, chiaramente possiamo scrivere

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Consideriamo allora la classe

$$\Sigma = \bigl\{F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}) \bigm| F \text{ iniettiva, } F(z) = z + \sum_{n\geq 1} b_n z^{-n}\bigr\}.$$

Un conto veloce dimostra che

$$f \in \mathcal{S} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{f(1/z)} + a_2 \in \Sigma;$$

questo risultato ci permetterà di trasferire risultati su Σ in risultati su $\mathcal{S}$.

Il risultato cruciale da questo punto di vista è il *Teorema dell'area,* per la cui dimostrazione ci serve un'osservazione preliminare.

Sia $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una curva semplice chiusa. Indichiamo con C l'immagine di γ, e con D il dominio limitato da C; supponiamo anche che γ sia orientata positivamente rispetto a D. Allora il Teorema di Green-Stokes ci dice che per ogni 1-forma ω che sia C^1 in un intorno di $\overline{D}$ abbiamo

$$\int_D d\omega = \int_C \omega.$$

In particolare, prendendo $\omega_0 = \bar{z}\, dz$ otteniamo

$$d\omega_0 = d\bar{z} \wedge dz = 2i\, dx \wedge dy,$$

e quindi

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2i} \int_D d\omega_0 = \frac{1}{2i} \int_C \omega_0 = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\, dt. \tag{5.3}$$

Come conseguenza troviamo:

Teorema 5.2: (Gronwall) *Sia $F \in \Sigma$. Allora*

$$\sum_{n\geq 1} n|b_n|^2 \leq 1.$$

Dimostrazione: Fissato $r > 1$, siano $C_r = \partial\Delta_r$ e $\Gamma_r = F(C_r)$. Essendo $F \in \Sigma$, Γ_r è una curva semplice chiusa nel piano complesso; indichiamo con A_r l'area racchiusa. Prendendo $\gamma(t) = F(re^{it})$, la formula (5.3) ci dice che

$$A_r = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \overline{F(re^{it})} F'(re^{it}) e^{it}\, dt.$$

Ora

$$\overline{F(re^{it})} = re^{-it} + \sum_{h\geq 1} \overline{b_h} r^{-h} e^{iht},$$
$$F'(re^{it}) = 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{kb_k}{r^{k+1}} e^{-i(k+1)t},$$

per cui

$$\overline{F(re^{it})}F'(re^{it})e^{it} = r - \sum_{n\geq 1} \frac{n|b_n|^2}{r^{2n+1}} + \text{termini contenenti } e^{ikt} \text{ con } k \neq 0.$$

Integrando troviamo

$$0 < A_r = \pi \left(r^2 - \sum_{n\geq 1} \frac{n|b_n|^2}{r^{2n}} \right).$$

La tesi si ottiene facendo tendere r a 1^+. □

Corollario 5.3: *Sia $F \in \Sigma$. Allora $|b_1| \leq 1$, e $|b_1| = 1$ sse*

$$F(z) = z + \frac{b_1}{z}.$$

Dimostrazione: Ovvio. □

La prima conseguenza di questa stima è il fondamentale *Teorema di Bieberbach:*

Teorema 5.4: (Bieberbach) *Sia $f \in \mathcal{S}$. Allora $|a_2| \leq 2$, e $|a_2| = 2$ sse f è una funzione di Kœbe.*

Dimostrazione: Sia $h: \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ data da $h(z) = 1/f(z^{-1})$. In particolare,

$$h(z) = z - a_2 + \frac{a_2^2 - a_3}{z} + \cdots, \tag{5.4}$$

per cui $h + a_2 \in \Sigma$ e $b_1 = a_2^2 - a_3$. Il Corollario 5.3 quindi implica

$$|a_2^2 - a_3| \leq 1. \tag{5.5}$$

Sia $g \in \mathcal{S}$ data dal Lemma 5.1. Allora

$$g(z) = \big(f(z^2)\big)^{1/2} = (z^2 + a_2 z^4 + \cdots)^{1/2} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \cdots,$$

e la (5.5) ci dà

$$|a_2| \leq 2.$$

Supponiamo ora che $|a_2| = 2$. Allora ponendo $G(z) = 1/g(z^{-1})$ abbiamo $G \in \Sigma$, e (5.4) e il Corollario 5.3 implicano

$$G(z) = z - \frac{a_2}{2z}.$$

Ricordando che $G(z)^2 = 1/f(z^{-2})$ otteniamo infine

$$f(z) = \frac{z}{(1 - a_2 z/2)^2},$$

che è una funzione di Kœbe. □

Questo risultato (come pure l'espansione (5.2)) ha suggerito a Bieberbach la seguente congettura: se $f \in \mathcal{S}$ allora $|a_n| \le n$. Questa congettura è stata dimostrata recentemente (de Brange, 1985); più oltre vedremo un risultato più debole.

Esercizio 5.4. Una $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ è detta *tipicamente reale* se $f(z) \in \mathbb{R}$ accade sse $z \in (-1,1)$. Dimostra che se $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ è tipicamente reale, allora $|a_n| \le n$. (*Suggerimento:* scrivi $\operatorname{Im} f(z)$ in coordinate polari, e utilizza le formule di ortogonalità di $\sin(n\theta)$ per ricavare $a_n r^n$.) Deduci che la congettura di Bieberbach vale per le $f \in \mathcal{S}$ con $a_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \ge 2$.

Una conseguenza del Teorema di Bieberbach (che migliora notevolmente il Lemma 4.1) è il *Teorema $\frac{1}{4}$ di Kœbe:*

Teorema 5.5: (Kœbe) *Se $f \in \mathcal{S}$ allora $f(\Delta) \supset \Delta_{1/4}$. Inoltre, $\overline{\Delta_{1/4}}$ non è contenuto in $f(\Delta)$ sse f è di Kœbe.*

Dimostrazione: Prendiamo $c \notin f(\Delta)$, e poniamo

$$h(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)}.$$

Si verifica facilmente che h è iniettiva e

$$h(z) = z + \left(\frac{1}{c} + a_2\right) z^2 + \cdots,$$

per cui $h \in \mathcal{S}$ e il Teorema 5.4 implica

$$\left|\frac{1}{c} + a_2\right| \le 2.$$

D'altra parte,

$$2 \ge \left|\frac{1}{c} + a_2\right| \ge \frac{1}{|c|} - |a_2| \ge \frac{1}{|c|} - 2,$$

per cui $|c| \ge 1/4$, e l'uguaglianza può avvenire sse $|a_2| = 2$, cioè sse f è di Kœbe. □

Esercizio 5.5. Una funzione $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ è detta *convessa* se $f(\Delta)$ è convesso. Dimostra che se $f \in \mathcal{S}$ è convessa allora $f(\Delta) \supset \Delta_{1/2}$. (*Suggerimento:* Sia $c \notin f(\Delta)$; applica il Teorema 5.5 alla funzione $h = (c^2 - g)/2c$, dove $g = (f - c)^2$.) Discuti il caso limite, tenendo presente la funzione $f(z) = z/(1 - z)$.

Un'altra conseguenza del Teorema di Bieberbach è il *Teorema di distorsione di Kœbe:*

Teorema 5.6: (Kœbe) *Sia $f \in \mathcal{S}$. Allora si ha*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{5.6}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{5.7}$$

per ogni $z \in \Delta$.

Dimostrazione: Fissato $z_0 \in \Delta$ sia $T_{z_0} f \in \mathcal{S}$ la trasformata di Kœbe di f. Siccome abbiamo

$$(T_{z_0} f)''(0) = (1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\overline{z_0},$$

il Teorema 5.4 implica

$$\forall z \in \Delta \qquad \left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\overline{z}}{1-|z|^2}\right| \le \frac{4}{1-|z|^2}.$$

Moltiplicando per $|z|$ otteniamo

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}z - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \le \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Ora, scrivendo $z = re^{i\theta}$ troviamo

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log\bigl(f'(z)\bigr) = z\frac{f''(z)}{f'(z)},$$

per cui

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}z - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right) = r\left(\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| - \frac{2r}{1-r^2}\right),$$

e dunque otteniamo

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| - \frac{2r}{1-r^2}\right| \le \frac{4}{1-r^2},$$

cioè

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \le \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \le \frac{2r+4}{1-r^2}.$$

Integrando lungo il segmento $t \mapsto tz$ troviamo

$$\log\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le \log|f'(z)| \le \log\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

cioè le (5.7). Siccome

$$|f(z)| = |f(z) - f(0)| \le \int_0^{|z|} |f'(tz/|z|)|\,dt$$

integrando otteniamo una delle (5.6). Per l'altra, fissiamo $0 < r < 1$ e poniamo

$$m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)| > 0.$$

Sia $z_0 \in \partial\Delta_r$ tale che $|f(z_0)| = m(r)$. Allora la curva ℓ, immagine tramite f^{-1} del segmento che collega l'origine a $f(z_0)$, collega l'origine a z_0 rimanendo sempre all'interno del disco Δ_r. Quindi

$$m(r) = \int_{f(\ell)} |d\zeta| = \int_\ell |f'(z)||dz| \ge \int_\ell \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\,|dz| \ge \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3}\,dt = \frac{r}{(1+r)^2},$$

ed è fatta. □

Esercizio 5.6. Dimostra che l'uguaglianza in un punto in (5.6) o in (5.7) avviene solo per le funzioni di Kœbe.

Esercizio 5.7. Dimostra che $\mathcal{S}$ è compatto.

Esercizio 5.8. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definita in un aperto Ω non contenente l'origine, e scriviamo

$$f(re^{it}) = R(re^{it})e^{i\Phi(re^{it})},$$

dove $R(re^{it}) = |f(re^{it})|$. Dimostra che f è olomorfa sse

$$\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \theta} = -r\frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

(*equazioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari*).

Esercizio 5.9. Sia $C \subset \mathbb{C}$ una curva semplice chiusa contornante l'origine, parametrizzata in senso antiorario da $t \mapsto R(t)e^{i\Phi(t)}$. Sia $R_0 \ge \max R(t)$. Dimostra che

$$2\pi R_0 \ge \int_C R\,d\Phi.$$

Una conseguenza è la seguente versione della congettura di Bieberbach:

Proposizione 5.7: (Littlewood) *Sia $f \in \mathcal{S}$. Allora $|a_n| < ne$ per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione: Fissiamo $0 < r < 1$, e sia C_r l'immagine tramite f della circonferenza $\{|z| = r\}$, e sia

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Allora gli Esercizi 5.8 e 5.9 (scrivendo $f(re^{it}) = R(t)e^{i\Phi(t)}$) ci dicono che

$$2\pi M(r) \geq \int_{C_r} R\, d\Phi = \int_0^{2\pi} R \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dt = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial r}\, dt = r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} R\, dt,$$

cioè, integrando rispetto a r,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \int_0^r \frac{M(\rho)}{\rho}\, d\rho.$$

Ora, sappiamo che

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz;$$

quindi

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \int_0^r \frac{M(\rho)}{\rho}\, d\rho.$$

Applichiamo adesso il Teorema 5.6; troviamo

$$|a_n| r^n \leq \int_0^r \frac{d\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{r}{1-r}.$$

Prendendo $r = 1 - 1/n$ troviamo

$$|a_n| \leq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < ne.$$

□

In quest'ordine d'idee si situa anche una dimostrazione del Teorema di Bloch. Ci servirà il seguente

Lemma 5.8: *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un disco di centro z_0 e $f \in \mathcal{O}(D)$ tale che*

$$\forall z \in D \qquad |f'(z) - f'(z_0)| < |f'(z_0)|.$$

Allora f è iniettiva.

Dimostrazione: Prendiamo $z_1 \neq z_2$, e sia ℓ il segmento da z_1 a z_2. Allora

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &= \left| \int_\ell [f'(z) - f'(z_0) + f'(z_0)]\, dz \right| \\ &\geq |z_2 - z_1||f'(z_0)| - \int_\ell |f'(z) - f'(z_0)||dz| > 0 \end{aligned}$$

per l'ipotesi, e ci siamo. □

Sia $f \in \mathcal{O}(\Delta)$. Il *numero di Bloch* B_f di f è dato da

$B_f = \sup\{r > 0 \mid$ esiste un disco $D_0 \subset \Delta$ tale che $f|_{D_0}$ sia iniettiva e $f(D_0)$ contenga un disco di raggio $r\}$.

La *costante di Bloch* B è data da

$$B = \inf_{f \in \mathcal{R}} B_f.$$

Siamo ora in grado di dimostrare il *Teorema di Bloch:*

Teorema 5.9: (Bloch) $B \geq 1/24$.

Dimostrazione: Fissiamo $0 < r < 1$ e poniamo, come nella dimostrazione del Teorema 4.2,

$$M(s) = \max_{|z| \leq s} |f'(z)|$$

e

$$\mu(s) = sM(r - s)$$

per $0 \leq s \leq r$. Abbiamo $\mu(0) = 0$ e $\mu(r) = r$; sia $0 < 2R \leq r$ il minimo valore di s per cui $\mu(s) = r$.

Scegliamo ora $z_0 \in \Delta$ con $|z_0| = r - 2R$ tale che $|f'(z_0)| = r/2R$, e sia D il disco di centro z_0 e raggio R. Essendo $D \subset \Delta_{r-R}$, abbiamo chiaramente $|f'(z)| \leq M(r - R)$ per ogni $z \in D$. Inoltre $\mu(R) < r$, per cui

$$M(r - R) < \frac{r}{R}.$$

Dunque se $z \in D$ abbiamo

$$|f'(z) - f'(z_0)| < |f'(z)| + |f'(z_0)| \leq 3r/2R.$$

In particolare, f' manda D nel disco di centro $f'(z_0)$ e raggio $3r/2R$; il lemma di Schwarz quindi implica

$$\forall z \in D \qquad |f'(z) - f'(z_0)| \leq \frac{3r}{2R^2} |z - z_0|.$$

Sia ora D_0 il disco di centro z_0 e raggio $R/3$. Allora

$$\forall z \in D_0 \qquad |f'(z) - f'(z_0)| < \frac{r}{2R} = |f'(z_0)|;$$

quindi, per il Lemma 5.8, f è iniettiva su D_0.

Infine definiamo $g \in \mathcal{S}$ ponendo

$$g(z) = \frac{3}{Rf'(z_0)} \big(f(z_0 + Rz/3) - f(z_0) \big).$$

Per il Teorema 5.5, $g(\Delta)$ contiene $\Delta_{1/4}$; quindi $f(D_0)$ contiene un disco di raggio $R|f'(z_0)|/12 = r/24$, e $f|_{D_0}$ è iniettiva.

Facendo tendere r a 1^- abbiamo la tesi. □

Esercizio 5.10. Sia $f \in \mathcal{S}$ e $D = f(\Delta)$. Allora dimostra che

$$\frac{1}{4} \leq d(0, \partial D) \leq 1.$$

(*Suggerimento:* sia $\delta = d(0, \partial D)$, e $h(z) = f^{-1}(\delta z)$. Applica il lemma di Schwarz.)

Esercizio 5.11. Sia $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ iniettiva, e poniamo $D = f(\Delta)$. Dimostra che

$$\frac{1}{4}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq d\big(f(z), \partial D\big) \leq (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

(*Suggerimento:* applica la trasformata di Kœbe all'esercizio precedente.)

Esercizio 5.12. Sia $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ iniettiva e convessa, e sia $g \in \mathcal{O}(\Delta)$ tale che $g(\Delta) \subseteq f(\Delta)$. Supponiamo inoltre $f(0) = g(0) = 0$, e scriviamo $g(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$. Dimostra che $|b_n| \leq |f'(0)|$ per ogni $n \geq 1$. In particolare, dimostra che se $f \in \mathcal{S}$ è convessa, allora $|a_n| \leq 1$; confronta con $z/(1 - z)$.

Esercizio 5.13. Dimostra che se $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ è iniettiva, $f(0) = 1$ e $\operatorname{Re} f > 0$, allora $|a_n| \leq 2$.

6. Teorema di uniformizzazione di Riemann

In questo paragrafo vogliamo dimostrare il *Teorema di uniformizzazione di Riemann:* ogni dominio semplicemente connesso del piano diverso da $\mathbb{C}$ è biolomorfo a Δ. In realtà dimostreremo un risultato ben più forte: ogni dominio limitato di $\mathbb{C}$ è rivestito da Δ. Siccome, come vedremo, ogni dominio semplicemente connesso diverso da $\mathbb{C}$ è biolomorfo a un dominio limitato, il teorema di uniformizzazione di Riemann è una conseguenza di questo risultato.

Il lemma cruciale che ci permetterà di procedere è il seguente:

Lemma 6.1: *Sia $\Omega\subset\Delta$ un dominio limitato, con $0\in\Omega\ne\Delta$. Allora esiste una $f\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ tale che:*
(i) *$f(0)=0$, $f'(0)>0$ e $f(\Delta)\supseteq\Omega$;*
(ii) *se Ω_1 è la componente connessa di $f^{-1}(\Omega)$ contenente 0, allora $f|_{\Omega_1}\colon\Omega_1\to\Omega$ è un rivestimento;*
(iii) *si ha*
$$d_1=\inf_{z\notin\Omega_1}|z|>\inf_{z\notin\Omega}|z|=d.$$

Dimostrazione: Scegliamo $a\in\Delta\setminus\Omega$ e $b\in\Delta$ tale che $b^2=-a$. Siano φ, $\psi\in\mathrm{Aut}(\Delta)$ dati da
$$\varphi(z)=\frac{z+a}{1+\overline{a}z},\qquad \psi(z)=\frac{z+b}{1+\overline{b}z},$$
e poniamo
$$f(z)=\frac{\overline{b}}{|b|}\varphi\bigl(\psi(z)^2\bigr).$$
Chiaramente $f(\Delta)=\Delta$, $f(0)=0$ e
$$f'(0)=2|b|\frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}>0.$$
Inoltre $w\mapsto w^2$ è un rivestimento da Δ^* su Δ^*; siccome $\varphi^{-1}(\Omega)\subset\Delta^*$ in quanto $\varphi(0)=a\notin\Omega$, ne segue che $f|_{\Omega_1}\colon\Omega_1\to\Omega$ è un rivestimento. Infine, se $d_1=1$ la (iii) è ovvia; altrimenti, sia $z_1\in\partial\Omega_1$ con $|z_1|=d_1$. Chiaramente (f è continua) $f(z_1)\notin\Omega$, per cui $|f(z_1)|\ge d$. Ma il lemma di Schwarz ci dice che $|f(z_1)|<|z_1|=d_1$, in quanto $f\notin\mathrm{Aut}(\Delta)$, e ci siamo. □

ESERCIZIO 6.1. Sia $f\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ un'applicazione 2-a-1 e surgettiva. Dimostra che esistono φ, $\psi\in\mathrm{Aut}(\Delta)$ tali che $f(z)=\varphi\bigl(\psi(z)^2\bigr)$. (*Suggerimento:* siano z_1, $z_2\in\Delta$ gli unici tali che $f(z_1)=f(z_2)=0$, e sia $w\in\Delta$ il punto medio della geodetica che collega z_1 a z_2. Scegli ψ in modo che $\psi(w)=0$ e prosegui.)

E allora:

Teorema 6.2: (Osgood, Kœbe) *Sia $\Omega\subset\subset\mathbb{C}$ un dominio limitato, e $z_0\in\Omega$. Allora esiste un unico rivestimento $f_0\colon\Delta\to\Omega$ tale che $f_0(0)=z_0$ e $f_0'(0)>0$.*

Dimostrazione: L'unicità è l'Esercizio 6.2.

Passiamo all'esistenza. Possiamo supporre $\Omega\subset\subset\Delta$ e $z_0=0\in\Omega$. Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ delle $f\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ tali che valgano le proprietà (i) e (ii) del precedente Lemma, che ci assicura fra l'altro che $\mathcal{F}\ne\varnothing$. Per ogni $f\in\mathcal{F}$ indichiamo con Ω_f la componente connessa di $f^{-1}(\Omega)$ contenente l'origine, e poniamo
$$d_f=\inf_{z\notin\Omega_f}|z|.$$
Sia $d=\sup\{d_f\mid f\in\mathcal{F}\}\le 1$. Scegliamo una successione $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ tale che $d_{f_n}\to d$; per il teorema di Montel, possiamo anche supporre che $f_n\to f_0\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$.

Vogliamo dimostrare che $f_0\in\mathcal{F}$. Chiaramente, $f_0(0)=0$ e $f_0'(0)\ge 0$. Poi:

(a) *f_0 non è costante e $f_0'(0)>0$.* Infatti, sia $r>0$ tale che $\Delta_r\subset\subset\Omega$. Sia $h_n\in\mathrm{Hol}(\Delta_r,\Delta)$ l'inversa di f_n su Δ_r tale che $h_n(0)=0$. Per il teorema di Montel, a meno di sottosuccessioni possiamo supporre che $h_n\to h_0\in\mathrm{Hol}(\Delta_r,\Delta)$. Chiaramente, $f\circ h_0=\mathrm{id}_{\Delta_r}$; ne segue che f_0 non è costante, e $f_0'(0)>0$.

(b) *$f_0(\Omega_{f_0})\supseteq\Omega$.* Sia $z_0\in\Omega$, e fissiamo una curva $\gamma\subset\Omega$ collegante 0 con z_0. Ricopriamo γ con un numero finito di dischi $D_0=\Delta_r$, $D_1,\dots,D_k$ tali che $D_j\cap D_{j+1}\ne\varnothing$ e $z_0\in D_k$. Indichiamo con $h_{n,0}$ l'inversa di f_n su D_0 tale che $h_{n,0}(0)=0$, e, per induzione, con $h_{n,j}$ l'inversa di f_n su D_j che coincide con $h_{n,j-1}$ su $D_j\cap D_{j-1}$. A meno di sottosuccessioni, possiamo di nuovo supporre che $h_{n,0}\to h_{0,0}\in \mathrm{Hol}(D_0,\Delta)$. Il teorema di Vitali allora implica che $h_{n,j}$ converge per ogni j; in particolare, $h_{n,k}\to h_{0,k}\in\mathrm{Hol}(D_k,\Delta)$. Essendo $f_0\circ h_{0,k}=\mathrm{id}_{D_k}$, ne segue che $z_0=f_0\bigl(h_{0,k}(z_0)\bigr)\in f_0(\Delta)$. Più precisamente, siccome gli $h_{0,k}$ ci permettono di sollevare (rispetto a f_0) γ a una curva $\tilde\gamma$ in Δ collegante 0 con $h_{0,k}(z_0)$, ne segue che $h_{0,k}(z_0)\in\Omega_{f_0}$, come richiesto.

(c) $f_0|_{\Omega_{f_0}}\colon\Omega_{f_0}\to\Omega$ *è un rivestimento.* Scegliamo di nuovo $z_0\in\Omega$, e sia $D\subset\Omega$ un disco di centro z_0. Per ogni $w_0\in f_0^{-1}(z_0)\cap\Omega_{f_0}$ dobbiamo trovare un intorno $U_{w_0}\subset\Omega_{f_0}$ di w_0 tale che $f_0|_{U_{w_0}}\colon U_{w_0}\to D$ sia un omeomorfismo, e in modo che $w_0\ne w_0'$ implichi $U_{w_0}\cap U_{w_0'}=\varnothing$. Per il Teorema 2.3, possiamo scegliere $n_1\ge1$ e (per $n\ge n_1$) $w_n\in\Delta$ tali che $f_n(w_n)=z_0$ e $w_n\to w_0$. Sia $h_n\in\mathrm{Hol}(D,\Delta)$ l'inversa di f_n con $h_n(z_0)=w_n$; a meno di sottosuccessioni possiamo supporre che $h_n\to h_0\in\mathrm{Hol}(D,\Delta)$. Chiaramente, $h_0(z_0)=w_0$ e $f_0\circ h_0=\mathrm{id}_D$; quindi $U_{w_0}=h_0(D)$ è come richiesto. Preso un altro $w_0'\in f_0^{-1}(z_0)\cap\Omega_{f_0}$, costruiamo h_0' e $U_{w_0'}$ in modo analogo; possiamo anche supporre di stare usando la stessa sottosuccessione delle f_n. Se $w=h_0(z_1)=h_0'(z_1')\in U_{w_0}\cap U_{w_0'}$, applicando f_0 troviamo subito che $z_1=f_0(w)=z_1'$. Quindi $z_1=z_1'$ è uno zero in D della funzione h_0-h_0'; ma essendo $w_0\ne w_0'$ le funzioni h_n-h_n' non hanno zeri per n abbastanza grande, per cui il Corollario 2.4 ci assicura che $h_0-h_0'\equiv0$, cioè $U_{w_0}=U_{w_0'}$, come volevamo.

Quindi $f_0\in\mathcal F$. Per concludere rimane da dimostrare che $\Omega_{f_0}=\Delta$. Supponiamo che non lo sia; allora possiamo applicare il Lemma 6.1 a Ω_{f_0}, ottenendo una $g\in\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ tale che $f_0\circ g\in\mathcal F$ e $d_{f_0\circ g}>d_{f_0}$, contraddizione. □

Esercizio 6.2. Dimostra l'unicità del rivestimento costruito nel Teorema precedente. (*Suggerimento:* usa il Teorema 0.24 e il lemma di Schwarz.)

E quindi:

Corollario 6.3: (Riemann) *Sia $\Omega\subset\mathbb C$ semplicemente connesso, con $\Omega\ne\mathbb C$. Allora Ω è biolomorfo a Δ.*

Dimostrazione: Essendo Ω semplicemente connesso, basta dimostrare che è biolomorfo a un dominio limitato. Prendiamo $a\in\mathbb C\setminus\Omega$; essendo Ω semplicemente connesso, possiamo trovare $h\in\mathcal O(\Omega)$ tale che $h(z)^2=z-a$. Ora $h(z_1)=\pm h(z_2)$ implica $z_1=z_2$ (in particolare, h è iniettiva, e $h(\Omega)\cap -h(\Omega)=\varnothing$): infatti, in tal caso

$$z_1-a=h(z_1)^2=h(z_2)^2=z_2-a.$$

Fissato $z_0\in\Omega$, sia $r>0$ tale che il disco D di centro $h(z_0)$ e raggio r sia contenuto in $h(\Omega)$; allora $-D\cap h(\Omega)=\varnothing$, cioè $|h(z)+h(z_0)|\ge r$ per ogni $z\in\Omega$. In particolare, $2|h(z_0)|\ge r$. Allora poniamo

$$f(z)=\frac{r}{4}\frac{1}{|h(z_0)|}\frac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}.$$

È evidente che f è iniettiva; inoltre

$$\left|\frac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}\right|=|h(z_0)|\left|\frac{1}{h(z_0)}-\frac{2}{h(z)+h(z_0)}\right|\le\frac{4|h(z_0)|}{r},$$

e quindi $f(\Omega)\subset\Delta$. □

Nota: Se il bordo di Ω è una curva di Jordan, allora il biolomorfismo si estende con continuità al bordo (a essere esatti, sse).

Esercizio 6.3. Sia $\Omega\subset\mathbb C$ semplicemente connesso, con $\Omega\ne\mathbb C$. Dimostra che per ogni $z_0\in\Omega$ esiste un unico biolomorfismo $f\colon\Delta\to\Omega$ con $f(0)=z_0$ e $f'(0)>0$.

Esercizio 6.4. Dimostra direttamente il Corollario 6.3, usando la famiglia $\mathcal F$ delle $f\in\mathrm{Hol}(\Omega,\Delta)$ tali che $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$ e f iniettiva.

Esercizio 6.5. Dimostra che $\mathbb C$ non è biolomorfo ad alcun suo sottodominio.

Esercizio 6.6. Dimostra che per ogni $a \in \mathbb{C}$ esiste un rivestimento da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, ma non da Δ a $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. (*Suggerimento:* usa l'esponenziale.)

Esercizio 6.7. Dimostra che $\mathbb{C}$ meno un numero finito di punti non è biolomorfo a un dominio limitato.

Esercizio 6.8. Supponendo che esista un rivestimento $f_0 \colon \Delta \to \Omega_{0,1}$, dimostra che ogni dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ diverso da $\mathbb{C}$ o da $\mathbb{C}$ meno un punto è rivestito da Δ.

Esercizio 6.9. Sia $f_0 \colon \Delta \to \Omega$ un rivestimento. Per ogni z, $w \in \Omega$ poniamo

$$\omega_\Omega(z,w) = \inf\{\omega(\tilde{z},\tilde{w}) \mid \tilde{z} \in f_0^{-1}(z), \tilde{w} \in f_0^{-1}(w)\}.$$

(i) Dimostra che in realtà
$$\omega_\Omega(z,w) = \min\{\omega(\tilde{z}_0,\tilde{w}) \mid \tilde{w} \in f_0^{-1}(w)\},$$
dove $\tilde{z}_0$ è un qualunque elemento di $f_0^{-1}(z)$.

(ii) Dimostra che ω_Ω è una distanza completa su Ω.

(iii) Poniamo $\omega_{\mathbb{C}} \equiv 0$ e $\omega_{\mathbb{C}\setminus\{a\}} \equiv 0$. Dimostra che per ogni Ω_1, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_1,\Omega_2)$ e z_1, $z_2 \in \Omega_1$ si ha
$$\omega_{\Omega_2}\big(f(z_1), f(z_2)\big) \le \omega_{\Omega_1}(z_1,z_2),$$
con uguaglianza per qualche $z_1 \neq z_2$ sse f è un rivestimento.

(iv) Supponendo che esista un rivestimento $f \colon \Delta \to \Omega_{0,1}$, deduci da (i)–(iii) il teorema di Schottky.

7. Il teorema di Runge

Iniziamo con la versione non omogenea della formula di Cauchy:

Teorema 7.1: *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ un dominio limitato tale che $\partial\Omega$ sia l'unione di un numero finito di curve di Jordan, e sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Allora*

$$u(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z-w}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\Omega \frac{\partial u/\partial\bar{z}}{z-w}\,dz\wedge d\bar{z}$$

per ogni $w \in \Omega$.

Dimostrazione: Fissato $w \in \Omega$, sia $0 < \varepsilon < d(w,\partial\Omega)$ e poniamo $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega \mid |z-w| > \varepsilon\}$. Ora, la formula di Green-Stokes ci dà
$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v\,dz = \int_{\Omega_\varepsilon} dv\wedge dz = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial\bar{z}}\,d\bar{z}\wedge dz$$
per ogni $v \in C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$. Se prendiamo $v(z) = u(z)/(z-w)$ otteniamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u/\partial\bar{z}}{z-w}\,d\bar{z}\wedge dz = \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z-w}\,dz - \int_0^{2\pi} u(w+\varepsilon e^{i\theta})i\,d\theta.$$

Essendo $1/(z-w)$ integrabile in Ω e u continua in w, otteniamo la tesi facendo tendere ε a zero. □

Esercizio 7.1. Dimostra che z^{-1} è integrabile sui compatti di $\mathbb{C}$, ovvero che $z^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$.

Usiamo questo risultato per ottenere una soluzione dell'equazione di Cauchy-Riemann non omogenea:

Proposizione 7.2: (i) *Sia μ una misura con $K = \mathrm{supp}(\mu)$ compatto in $\mathbb{C}$. Allora l'integrale*

$$u(w) = \int \frac{1}{w-z}\,d\mu(z) \tag{7.1}$$

definisce una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus K$.

(ii) *Sia* $\varphi \in C^k_o(\mathbb{C})$, *e poniamo* $\mu = (2\pi i)^{-1}\varphi\, dz \wedge d\bar z$. *Sia* Ω *la parte interna del supporto di* μ, *e* u *data da* (7.1). *Allora* $u \in C^k(\mathbb{C})$ *e*

$$\forall z \in \Omega \qquad \frac{\partial u}{\partial \bar z}(z) = \varphi(z).$$

Dimostrazione: (i) Prendiamo $w \in \mathbb{C} \setminus K$. Allora $(w-z)^{-1}$ è C^∞ in (z,w) e olomorfa in w (quando $z \neq w$), per cui si ottiene subito che $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$.

(ii) Dopo un cambiamento di variabile possiamo scrivere

$$u(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(w-z)}{z}\, dz \wedge d\bar z.$$

Essendo z^{-1} integrabile sui compatti di $\mathbb{C}$, possiamo derivare sotto il segno di integrale k volte, e gli integrali ottenuti sono continui. Quindi $u \in C^k(\mathbb{C})$ e

$$\frac{\partial u}{\partial \bar w} = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\partial\varphi(w-z)/\partial\bar w}{z}\, dz \wedge d\bar z = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\partial\varphi(z)/\partial\bar z}{z-w}\, dz \wedge d\bar z.$$

Applicando il Teorema 7.1 a un disco abbastanza grande da contenere $\overline{\Omega}$ otteniamo quindi $\partial u/\partial\bar w = \varphi$. □

Argomento di questo paragrafo è l'approssimazione di funzioni olomorfe tramite funzioni definite su insiemi più grandi — per esempio tramite polinomi. Fissiamo alcune notazioni: dato un insieme compatto $K \subset \mathbb{C}$, indichiamo con $C^0(K)$ lo spazio delle funzioni continue con la norma

$$\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)|;$$

indichiamo invece con $\mathcal{O}(K)$ l'insieme delle restrizioni a K delle funzioni olomorfe in un intorno di K. Chiaramente, $\mathcal{O}(K)$ è un sottospazio (non necessariamente chiuso) di $C^0(K)$. Il primo *Teorema di Runge* ci dice quando è possibile approssimare le funzioni in $\mathcal{O}(K)$ con funzioni olomorfe definite in un aperto fissato:

Teorema 7.3: *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un aperto, e* $K \subset\subset \Omega$ *compatto. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *Ogni funzione in* $\mathcal{O}(K)$ *può essere approssimata uniformemente su* K *da funzioni in* $\mathcal{O}(\Omega)$.
(ii) *L'aperto* $\Omega \setminus K$ *non ha componenti connesse relativamente compatte in* Ω.
(iii) *Per ogni* $z \in \Omega \setminus K$ *esiste* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *tale che*

$$|f(z)| > \|f\|_K.$$

Dimostrazione: (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Sia, per assurdo, U una componente connessa di $\Omega \setminus K$ relativamente compatta in Ω. Allora $\partial U \subset K$ e il principio del massimo implicano

$$\|f\|_{\overline{U}} \le \|f\|_K \tag{7.2}$$

per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, contraddicendo (iii).

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Sia, di nuovo, U una componente connessa di $\Omega \setminus K$ relativamente compatta in Ω. Scegliamo $w \in U$, e poniamo $f(z) = (z-w)^{-1} \in \mathcal{O}(K)$. Se (i) fosse vera, potremmo trovare una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\|f_n - f\|_K \to 0$. Applicando (7.2) a $f_m - f_n$ troviamo che $\{f_n\}$ è di Cauchy in $C^0(U \cup K)$, per cui ivi converge a una $F \in C^0(\overline{U}) \cap \mathcal{O}(U)$. Chiaramente, $(z-w)F(z) \equiv 1$ su $\partial U \subset K$; applicando il principio del massimo a $(z-w)F(z) - 1$ troviamo $(z-w)F(z) \equiv 1$ su tutto U, che è chiaramente impossibile.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Indichiamo con $\mathcal{O}(\Omega)|_K$ lo spazio delle restrizioni a K delle funzioni in $\mathcal{O}(\Omega)$. Grazie al Teorema di Hahn-Banach, per dimostrare che $\mathcal{O}(\Omega)|_K$ è denso in $\mathcal{O}(K)$ è sufficiente dimostrare che per ogni misura μ con supporto in K (ovvero, per ogni elemento del duale di $C^0(K)$) tale che

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)|_K \qquad \int f(z)\, d\mu(z) = 0 \tag{7.3}$$

si ha anche

$$\forall g \in \mathcal{O}(K) \qquad \int g(w)\, d\mu(w) = 0.$$

Allora sia μ una misura per cui valga (7.3), e definiamo $\varphi\colon \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ ponendo

$$\varphi(w) = \int \frac{1}{z-w}\, d\mu(z).$$

Per la Proposizione 7.2.(i), $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$. Inoltre, se $w \notin \Omega$ la funzione $(z-w)^{-1}$ appartiene a $\mathcal{O}(\Omega)$, e quindi $\varphi|_{\mathbb{C}\setminus\Omega} \equiv 0$. Questo implica che $\varphi \equiv 0$ su ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$ che interseca $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Inoltre, $\int z^n\, d\mu(z) = 0$ per ogni $n \geq 0$, e $(z-w)^{-1}$ può essere sviluppata in una serie di potenze in z che converge uniformemente su K non appena $|w| > \|z\|_K$; quindi troviamo $\varphi \equiv 0$ nella componente illimitata di $\mathbb{C} \setminus K$. Ora (ii) ci assicura che non ci sono componenti di $\Omega \setminus K$ relativamente compatte in Ω, per cui abbiamo dimostrato che $\varphi \equiv 0$ in $\mathbb{C} \setminus K$.

Ora sia $g \in \mathcal{O}(K)$, e $U \supset K$ un intorno di K su cui g è olomorfa. Scegliamo $\psi \in C^\infty_o(U)$ tale che $\psi \equiv 1$ in un intorno di K. Allora su K abbiamo

$$g(w) = \psi(w) g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(z)}{z-w} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)\, dz \wedge d\bar{z}.$$

Essendo $\partial\psi/\partial\bar{z} = 0$ in un intorno di K abbiamo

$$\begin{aligned} \int g(w)\, d\mu(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int d\mu(w) \int_{U\setminus K} \frac{g(z)}{z-w} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z)\, dz \wedge d\bar{z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{U\setminus K} g(z) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) \varphi(z)\, dz \wedge d\bar{z} = 0, \end{aligned}$$

e ci siamo.

(i) + (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Fissiamo $z_0 \in \Omega \setminus K$, e scegliamo un disco chiuso $D \subset \Omega \setminus K$ di centro z_0. Dunque le componenti di $\Omega \setminus (K \cup D)$ sono le stesse di $\Omega \setminus K$, a parte il fatto che a una di esse è stato levato D. In particolare, quindi, anche $K \cup D$ soddisfa (ii). Quindi, per (i), la funzione che è 0 in un intorno di K e identicamente 1 in un intorno di D può essere approssimata uniformemente da funzioni in $\mathcal{O}(\Omega)$. In particolare, quindi, troviamo $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\|f\|_K < 1/2$ e $\|f-1\|_D < 1/2$, e dunque $|f(z_0)| > 1/2 > \|f\|_K$. □

Vogliamo ora arrivare ad altre due versioni del teorema di Runge. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, e $K \subset \Omega$ compatto. L'*inviluppo olomorfo* $\hat{K}_\Omega \subset \Omega$ è dato da

$$\hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leq \|f\|_K \text{ per ogni } f \in \mathcal{O}(\Omega)\}.$$

Vale la seguente:

Proposizione 7.4: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $K \subset \Omega$ compatto. Allora:*

(i) $\|f\|_{\hat{K}_\Omega} = \|f\|_K$ *per ogni* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
(ii) $K \subseteq \hat{K}_\Omega = \hat{\hat{K}}_\Omega$.
(iii) $d(w, \hat{K}_\Omega) = d(w, K)$ *per ogni* $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. *In particolare,* $d(\hat{K}_\Omega, \mathbb{C} \setminus \Omega) = d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.
(iv) $\hat{K}_\Omega$ *è compatto.*
(v) $\hat{K}_\Omega$ *è l'unione di K e delle componenti connesse di $\Omega \setminus K$ relativamente compatte in Ω.*
(vi) $\mathbb{C} \setminus \hat{K}_\Omega$ *ha solo un numero finito di componenti connesse.*

Dimostrazione: (i) Ovvio.

(ii) Ovvio.

(iii) Se $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, allora $f(z) = (z-w)^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$; quindi

$$\forall z \in \hat{K}_\Omega \qquad |z-w| = |f(z)|^{-1} \geq \inf_{\zeta \in K} |f(\zeta)|^{-1} = \inf_{\zeta\in K} |\zeta - w| = d(w, K).$$

Dunque $d(w, \hat{K}_\Omega) \geq d(w, K)$, e la disuguaglianza opposta segue da (ii).

(iv) Usando $f(z) = z$ si vede subito che $\hat{K}_\Omega$ è limitato; (iii) allora implica che $\hat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$. Inoltre, è chiaramente chiuso, per cui è compatto.

(v) Se U è una componente connessa di $\Omega \setminus K$ relativamente compatta in Ω, (7.2) implica $U \subset \hat{K}_\Omega$. L'unione K_1 di K e di tali componenti è contenuto in $\hat{K}_\Omega$, ed è chiuso, in quanto $\Omega \setminus K_1$ è un unione di componenti connesse (e quindi è aperto). Dunque K_1 è compatto, e per definizione nessuna componente connessa di $\Omega \setminus K_1$ è relativamente compatta in Ω. Dunque il Teorema 7.3.(iii) implica $K_1 = \hat{K}_1 \supseteq \hat{K}_\Omega$, e ci siamo.

(vi) Sia $R > 0$ tale che $\hat{K}_\Omega \subset \Delta_R$. Essendo $\mathbb{C} \setminus \Delta_R$ connesso e disgiunto da $\hat{K}_\Omega$, esiste una componente connessa U_0 di $\mathbb{C} \setminus \hat{K}_\Omega$ che lo contiene. Indichiamo con U_1 $U_2, \ldots$ le altre componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \hat{K}_\Omega$; sono tutte contenute in Δ_R.

Cominciamo col dimostrare che $U_j \not\subset \Omega$ per $j \geq 1$. Infatti, $\partial U_j \subset \hat{K}_\Omega$; se si avesse $U_j \subset \Omega$ allora U_j sarebbe una componente connessa di $\Omega \setminus \hat{K}_\Omega$ con $\overline{U_j} = U_j \cup \partial U_j \subset\subset \Omega$, e questo contraddirebbe (v).

Supponiamo allora, per assurdo, che la famiglia $\{U_j\}$ sia infinita, e per ogni $j \geq 1$ scegliamo $z_j \in U_j \setminus \Omega$. Possiamo trovare una sottosuccessione z_{j_ν} convergente a un punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sia $\rho > 0$ tale che si abbia $D(z_0, \rho) \cap \hat{K}_\Omega = \varnothing$. Essendo connesso, $D(z_0, \rho)$ è contenuto in una delle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \hat{K}_\Omega$; chiamiamola $\tilde{U}$. Ma $D(z_0, \rho) \cap U_j \neq \varnothing$ per infiniti valori di j, e questo implica $\tilde{U} \cap U_j \neq \varnothing$ per infiniti valori di j, impossibile. □

Esercizio 7.2. Dimostra che $\hat{K}_\Omega$ è contenuto nell'inviluppo convesso di K.

Nel seguito ci serviranno anche i seguenti risultati puramente topologici:

Proposizione 7.5: *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Sia L una componente connessa di X, e supponiamo che L sia compatta. Allora L ha un sistema fondamentale di intorni in X che sono contemporaneamente aperti e chiusi in X.*

Dimostrazione: Supponiamo inizialmente di aver dimostrato la proposizione quando X è compatto. Sia U un intorno di L in X, e $X_0 \subset U$ un intorno compatto di L (in uno spazio di Hausdorff relativamente compatto, i compatti hanno un sistema fondamentale d'intorni compatti). Dunque L è una componente connessa compatta di X_0. Sia V un aperto di X tale che $L \subset V \subset X_0$; per la nostra ipotesi possiamo trovare $N \subset X_0$ aperto e chiuso in X_0 e tale che $L \subset N \subset V$. Essendo X_0 chiuso, N è chiuso anche in X. Essendo N aperto in X_0, $N = N \cap V$ è aperto in V, e quindi in X, essendo V aperto in X.

Supponiamo quindi direttamente X compatto. Sia $\mathcal{N}$ la famiglia dei sottoinsiemi aperti e chiusi di X che contengono L. Ovviamente $X \in \mathcal{N}$, per cui $\mathcal{N} \neq \varnothing$. Poniamo $\tilde{L} = \cap \mathcal{N}$; ovviamente $L \subset \tilde{L}$ e $\tilde{L}$ è chiuso, e quindi compatto.

Ora dimostriamo che $\tilde{L}$ ammette un sistema fondamentale di intorni aperti e chiusi. Sia U un aperto di X contenente $\tilde{L}$; in particolare,

$$(X \setminus U) \cap \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = \varnothing.$$

Essendo $X \setminus U$ compatto, devono esistere $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{N}$ tali che

$$(X \setminus U) \cap \bigcap_{j=1}^{k} N_j = \varnothing.$$

Ma allora $N_0 = \bigcup_{j=1}^k N_j \in \mathcal{N}$ è aperto e chiuso, e $\tilde{L} \subset N_0 \subset U$.

Rimane da dimostrare che $\tilde{L} = L$. Per far ciò basta dimostrare che $\tilde{L}$ è connesso (in quanto L è una componente connessa di X). Supponiamo che non lo sia, e scriviamo $\tilde{L} = A \cup B$, dove A e B sono chiusi disgiunti non vuoti. Essendo $L \subset A \cup B$ connesso, dev'essere contenuto in uno dei due; diciamo $L \subset A$. Essendo A e B chiusi disgiunti, possiamo trovare aperti disgiunti U, V in X tali che $A \subset U$ e $B \subset V$. Per quanto appena visto, possiamo trovare $N \in \mathcal{N}$ tale che $\tilde{L} \subset N \subset U \cup V$. Ora, $N \cap U$ è aperto in X (in quanto N e U lo sono), ed è anche chiuso, in quanto $N \cap U = N \cap (X \setminus V)$. È evidente che $L \subset N \cap U$; quindi $N \cap U \in \mathcal{N}$, e dunque $\tilde{L} \subset N \cap U$. Ma allora $\tilde{L} \cap V = \varnothing$, per cui $B = \varnothing$, contraddizione. Ne segue che $\tilde{L}$ è connesso, e $L = \tilde{L}$ come voluto. □

Corollario 7.6: *Sia Y uno spazio di Hausdorff localmente compatto, X un sottoinsieme chiuso di Y, e L una componente connessa compatta di X. Allora esiste un sistema fondamentale di intorni U di L in Y tali che $\partial U \cap X = \varnothing$.*

Dimostrazione: Sia $V \subset\subset Y$ un intorno aperto di L. La Proposizione 7.5 ci fornisce allora $N \subset X$ aperto e chiuso in X e tale che $L \subset N \subset V$. In particolare, $E = X \setminus N$ è chiuso in X, e dunque in Y. Possiamo allora trovare U e W aperti in Y tali che $N \subset U \subset V$, $E \subset W$ e $U \cap W = \varnothing$; in particolare, $\overline{U} \cap E = \varnothing$. Inoltre $\partial U \cap N = \varnothing$, in quanto $N \subset U$. Dunque $\partial U \cap X = \partial U \cap (N \cup E) = \varnothing$, come volevamo. □

Abbiamo quindi la seguente versione del Teorema di Runge:

Teorema 7.7: *Siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ aperti. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *Ogni funzione in $\mathcal{O}(\Omega_1)$ può essere approssimata, uniformemente sui compatti di Ω_1, dalla restrizione di funzioni di $\mathcal{O}(\Omega_2)$.*
(ii) *Nessuna componente connessa di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ è compatta.*
(iii) *Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ abbiamo $\hat{K}_{\Omega_2} = \hat{K}_{\Omega_1}$.*
(iv) *Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ abbiamo $\hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \hat{K}_{\Omega_1}$.*
(v) *Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ l'insieme $\hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ è compatto.*

Dimostrazione: Prima di tutto, (i) implica (iv). Infatti, è evidente che $\hat{K}_{\Omega_1} \subseteq \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Viceversa, sia $z_0 \in \Omega_1 \setminus \hat{K}_{\Omega_1}$. In particolare, esistono una $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ e $\varepsilon > 0$ tali che $|f(z_0)| > \|f\|_K + \varepsilon$. Sia $F \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ tale che $\|F - f\|_{K \cup \{z_0\}} < \varepsilon/2$; allora

$$|F(z_0)| > |f(z_0)| - \varepsilon/2 > \|f\|_K + \varepsilon/2 > \|F\|_K,$$

e quindi $z_0 \notin \hat{K}_{\Omega_2}$.

È ovvio che (iii) implica (iv) implica (v). Dimostriamo ora che (v) implica (i): posto $K' = \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ e $K'' = \hat{K}_{\Omega_2} \setminus \Omega_1$, (v) implica che gli insiemi disgiunti $K' \supseteq K$ e K'' sono entrambi compatti. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, il Teorema 7.3 implica quindi che la funzione uguale a f su K' e uguale a 1 su K'' può essere approssimata da funzioni in $\mathcal{O}(\Omega_2)$, e quindi (i) vale. Scegliendo $f \equiv 0$ otteniamo invece $K'' = \varnothing$, ovvero $\hat{K}_{\Omega_2} \subset \Omega_1$ e quindi (iv) e (v) implicano (iii). Siccome (i) implica (iv), abbiamo dimostrato che (i), (iii), (iv) e (v) sono tutte equivalenti.

Per dimostrare che (ii) implica (iii), sia U una componente connessa di $\Omega_2 \setminus K$ relativamente compatta in Ω_2. Essendo $\partial U \subseteq K \subset \Omega_1$, l'insieme $L = U \setminus \Omega_1$ è compatto in Ω_2. Sia, per assurdo, $a \in L$, e sia C la componente connessa di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ contenente a. Dunque $C \cup U$ è connesso; ma U era una componente connessa di $\Omega_2 \setminus K \supset \Omega_2 \setminus \Omega_1$, per cui $U \supseteq C$. Ma allora C è relativamente compatta in Ω_2, contro (ii). Quindi $L = \varnothing$, cioè $U \subset \Omega_1$ e, essendo $\partial U \subset K$, U è contenuta in $\hat{K}_{\Omega_1}$, e quindi (iii) è dimostrata.

Rimane da dimostrare che (iii) implica (ii). Sia L una componente connessa di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ compatta in Ω_2. Per il Corollario 7.6 (applicato con $Y = \Omega_2$ e $X = \Omega_2 \setminus \Omega_1$) possiamo trovare un intorno U di L, relativamente compatto in Ω_2, e tale che $\partial U \subset \Omega_1$. Per il principio del massimo, l'inviluppo olomorfo rispetto a $\mathcal{O}(\Omega_2)$ di ∂U contiene U, per cui contiene anche L. Ma allora (iii) implica $L \subset \Omega_1$, cioè $L = \varnothing$. □

Da questo segue il *Teorema di Runge classico:*

Teorema 7.8: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, e sia $\mathbb{C} \setminus \Omega = \bigcup_\alpha C_\alpha$ la decomposizione in componenti connesse. Sia $E \subset \mathbb{C}$ un insieme discreto con esattamente un punto in ciascuna delle C_α compatte. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ può venire approssimata, uniformemente sui compatti di Ω, da funzioni razionali i cui poli sono tutti contenuti nell'insieme E.*

Dimostrazione: Sia $K \subset\subset \Omega$ compatto, e sia $L = \hat{K}_\Omega$. Per la Proposizione 7.4.(vii), $\mathbb{C} \setminus L$ ha una componente connessa illimitata U e un numero finito di componenti connesse limitate $W_1, \ldots, W_p$. Inoltre, ciascuna W_j non è contenuta in Ω, per cui interseca (e quindi contiene) una componente connessa C_{α_j} di $\mathbb{C} \setminus \Omega$. In particolare, questa C_{α_j} è compatta; sia $\{a_j\} = E \cap C_{\alpha_j}$.

Poniamo $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_p\} \supset L$. Le componenti connesse di $\Omega_0 \setminus L$ sono U e $W_j \setminus \{a_j\}$; in particolare, nessuna di queste è relativamente compatta in Ω_0. Dunque per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ed $\varepsilon > 0$ esiste una $F \in \mathcal{O}(\Omega_0)$

con $\|F-f\|_L < \varepsilon$. Indichiamo con g_j la parte principale di F in a_j; quindi $F = h+g_1+\cdots+g_p$, dove $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Dato $\delta > 0$, lo sviluppo di Taylor ci fornisce un polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ tale che $\|P - h\|_L < \delta$. Inoltre, posto

$$g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)}(z - a_j)^n, \qquad g_{j,N}(z) = \sum_{n=-N}^{-1} c_n^{(j)}(z - a_j)^n,$$

possiamo trovare $N > 0$ tale che $\|g_j - g_{j,N}\|_L < \delta$ per $j = 1, \ldots, p$. Dunque se $\delta(p + 1) < \varepsilon$ la funzione

$$G = P + g_{1,N} + \cdots + g_{p,N}$$

è una funzione razionale con poli contenuti in $\{a_1, \ldots, a_p\}$ tale che $\|G - f\|_L < 2\varepsilon$, e ci siamo. □

Corollario 7.9: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$. Allora ogni funzione in $\mathcal{O}(\Omega)$ può venire approssimata, uniformemente sui compatti, da polinomi sse $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non ha componenti connesse compatte.*

Dimostrazione: Segue subito dai Teoremi 7.7 e 7.8. □

Esercizio 7.3. Sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto tale che $\mathbb{C} \setminus K$ abbia solo un numero finito di componenti connesse limitate. Sia $f \in \mathcal{O}(K)$ tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in K$. Dimostra che, dato $\varepsilon > 0$, esiste una funzione razionale F mai nulla in un intorno di K tale che $\|F - f\|_K < \varepsilon$.

Concludiamo con una prima applicazione importante del Teorema di Runge. Ci servirà il seguente:

Lemma 7.10: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora esiste una successione crescente di compatti $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ tali che*

$$K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}, \qquad \bigcup_{\nu=1}^{\infty} = \Omega \qquad e \qquad \hat{K}_\nu = K_\nu \tag{7.4}$$

per tutti i $\nu \geq 1$, dove $\hat{K}_\nu$ è l'inviluppo olomorfo di K_ν in Ω.

Dimostrazione: Poniamo

$$H_\mu = \{z \in \Omega \mid |z| \leq \mu,\ d(z, \partial\Omega) \geq 1/\mu\}.$$

Chiaramente gli H_μ sono compatti, e soddisfano le prime due condizioni in (7.4). Poniamo $K_1 = \hat{H}_1$, che è compatto per la Proposizione 7.4.(iv). Dunque esiste μ_1 tale che $K_1 \subset \mathring{H}_{\mu_1}$; poniamo $K_2 = \hat{H}_{\mu_1}$. Procedendo in questo modo si ha la tesi. □

Abbiamo quindi il *Teorema di Malgrange:*

Teorema 7.11: (Malgrange) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Allora esiste $u \in C^\infty(\Omega)$ tale che*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi \tag{7.5}$$

su Ω.

Dimostrazione: Prima di tutto, osserviamo che se $K \subset \Omega$ è compatto, allora possiamo trovare $v \in C^\infty(\Omega)$ che risolve (7.5) in un intorno di K. Infatti, sia $\alpha \in C^\infty_o(\Omega)$ tale che $\alpha \equiv 1$ in un intorno di K; allora è sufficiente applicare la Proposizione 7.2.(ii) a $\alpha\varphi$.

Sia $\{K_\nu\}$ la successione di compatti data dal Lemma 7.10, e sia $v_\nu \in C^\infty(\Omega)$ una soluzione di (7.5) in un intorno di K_ν. In particolare, $v_{\nu+1} - v_\nu \in \mathcal{O}(K_\nu)$. Scegliamo $h_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\|v_{\nu+1} - v_\nu - h_\nu\|_{K_\nu} < 2^{-\nu}$, e definiamo u su Ω ponendo

$$u = v_\nu + \sum_{\mu \geq \nu}(v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu$$

in K_ν. Questo definisce univocamente u su K_ν; ma siccome

$$\begin{aligned} v_\nu &+ \sum_{\mu\ge\nu}(v_{\mu+1}-v_\mu-h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu \\ &= v_\nu + (v_{\nu+1}-v_\nu-h_\nu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu + \sum_{\mu\ge\nu+1}(v_{\mu+1}-v_\mu-h_\mu) \\ &= v_{\nu+1} + \sum_{\mu\ge\nu+1}(v_{\mu+1}-v_\mu-h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu} h_\mu, \end{aligned}$$

di fatto abbiamo definito u su tutto Ω, e chiaramente appartiene a $C^\infty(\Omega)$.

Siccome $v_{\mu+1}-v_\mu-h_\mu \in \mathcal{O}(\mathring{K}_\nu)$ per $\mu\ge\nu$ e la serie converge uniformemente in K_ν, otteniamo $u-v_\nu\in\mathcal{O}(\mathring{K}_\nu)$, e quindi $\partial u/\partial\bar z = \partial v_\nu/\partial\bar z = \varphi$ su $\mathring{K}_\nu$. Essendo ν arbitrario, u è una soluzione di (7.5). $\square$

Esercizio 7.4. Siano $0<r<R$, $\varepsilon>0$ e $f\in\mathcal{O}(\Delta_R)$. Costruisci un polinomio $P\in\mathbb{C}[z]$ tale che $\|P\|_{\Delta_r}\le\varepsilon$ e tale che su ogni segmento $[re^{i\theta},Re^{i\theta}]$ esistano due punti z_1, z_2 tali che $|f(z_1)+P(z_1)|<\varepsilon$ e $|f(z_2)+P(z_2)|>1/\varepsilon$.

Esercizio 7.5. Sia $\{r_n\}\subset(0,1)$ tale che $r_n\uparrow 1^-$. Usando l'esercizio precedente, costruisci una successione $\{P_n\}$ di polinomi tali che:
(a) $\|P_n\|_{\Delta_{r_n}}\le 1/2^n$;
(b) su ciascun segmento $[r_ne^{i\theta},r_{n+1}e^{i\theta}]$ esistono due punti in cui il valore assoluto della somma $P_1+\cdots+P_n$ è minore di $1/2^n$ nel primo punto e maggiore di 2^n nel secondo.

Dimostra che la serie $\sum_n P_n$ converge, uniformemente sui compatti, a una $f\in\mathcal{O}(\Delta)$ tale che per tutti i $\theta\in\mathbb{R}$ la funzione $r\mapsto f(re^{i\theta})$ non ha limite, finito o infinito che sia, quando $r\to1^-$.

Esercizio 7.6. Sia $0<r<1$ ed $\varepsilon>0$. Sia $\mathcal{H}$ la famiglia delle funzioni $f\in\mathcal{O}(\Delta)$ tali che su ogni segmento $[re^{i\theta},e^{i\theta}]$ assume, in modulo, valori sia minori di ε che maggiori di $1/\varepsilon$. Dimostra che $\mathcal{O}(\Delta)\setminus\mathcal{H}$ è un insieme chiuso a parte interna vuota di $\mathcal{O}(\Delta)$. Usando il Teorema di Baire deduci che l'insieme delle funzioni $f\in\mathcal{O}(\Delta)$ tali che esista almeno un $\theta_0\in\mathbb{R}$ per cui la funzione $r\mapsto f(re^{i\theta})$ abbia limite per $r\to1^-$ è un insieme di prima categoria in $\mathcal{O}(\Delta)$.

Nota: un famoso Teorema di Fatou asserisce che se $f\in\mathcal{O}(\Delta)$ è limitata allora il suddetto limite esiste per quasi ogni $\theta\in\mathbb{R}$.

Esercizio 7.7. Sia $K_1,\dots,K_n$ un arbitrario insieme finito di dischi chiusi in $\mathbb{C}$, e sia $\mathcal{M}$ la famiglia delle funzioni $f\in\mathcal{O}(\Delta)$ tali che l'immagine tramite f di ogni raggio di Δ interseca tutti i K_j. Dimostra che $\mathcal{O}(\Delta)\setminus\mathcal{M}$ è un insieme chiuso a parte interna vuota. Usando il Teorema di Baire deduci che l'insieme delle funzioni $f\in\mathcal{O}(\Delta)$ per cui esiste un raggio di Δ la cui immagine non è densa in $\mathbb{C}$ è un insieme di prima categoria in $\mathcal{O}(\Delta)$.

8. Il teorema di Mittag-Leffler

In questo paragrafo vogliamo discutere l'esistenza di funzioni meromorfe con singolarità assegnate. Nel seguito indicheremo con $\mathbb{C}_a$ l'insieme $\mathbb{C}\setminus\{a\}$.

Il risultato classico da cui partire è il *Teorema di Mittag-Leffler:*

Teorema 8.1: (Mittag-Leffler) *Sia $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ aperto, e $E\subset\Omega$ discreto. Sia data per ogni $a\in E$ una funzione $p_a\in\mathcal{O}(\mathbb{C}_a)$. Allora esiste $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus E)$ tale che $f-p_a$ è olomorfa in a per ogni $a\in E$. In particolare, possiamo trovare una $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ con parti principali prescritte.*

Dimostrazione: Sia $K_1\subset K_2\subset\cdots\subset\Omega$ la successione crescente di compatti data dal Lemma 7.10. Poniamo

$$g_\nu = \sum_{a\in E\cap K_\nu} p_a;$$

la somma è finita in quanto E è discreto. Chiaramente,

$$g_{\nu+1} - g_\nu = \sum_{a \in E \cap (K_{\nu+1} \setminus K_\nu)} p_a \in \mathcal{O}(K_\nu).$$

Essendo $K_\nu = \hat{K}_\nu$, il Teorema 7.3 ci fornisce una $h_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\|g_{\nu+1} - g_\nu - h_\nu\|_{K_\nu} \le 2^{-\nu}$. Allora poniamo

$$f = g_\nu + \sum_{\mu \ge \nu} (g_{\mu+1} - g_\mu - h_\mu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu.$$

Questo definisce univocamente f su $K_\nu \setminus E$; ma procedendo come nella dimostrazione del Teorema 7.11 si verifica facilmente che di fatto abbiamo definito f su tutto $\Omega \setminus E$, e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$.

Infine, sia $a \in E \cap K_\nu$. La serie nella definizione di f converge uniformemente su K_ν, per cui appartiene a $\mathcal{O}(\mathring{K}_\nu)$. Le h_μ sono olomorfe su tutto Ω, e per costruzione $g_\nu - p_a$ è olomorfa ad a; quindi $f - p_a$ è olomorfa in a come richiesto. □

Corollario 8.2: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $E \subset \Omega$ discreto. Siano dati per ogni $a \in E$ un intorno $U_a \subset \Omega$ di a e una funzione $\varphi_a \in \mathcal{O}(U_a \setminus \{a\})$. Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ tale che $f - \varphi_a$ è olomorfa in a per ogni $a \in E$.*

Dimostrazione: Sia $p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_a)$ la parte principale di φ_a in a. Essendo $\varphi_a - p_a$ olomorfa in a, basta applicare il Teorema 8.1 usando le p_a per trovare la f cercata. □

Il Teorema di Mittag-Leffler ha una naturale interpretazione coomologica. Per descriverla, dobbiamo introdurre il fascio delle funzioni meromorfe.

Per ogni $a \in \mathbb{C}$ indichiamo con $\mathcal{M}_a$ il campo quoziente di $\mathcal{O}_a$, cioè l'insieme delle frazioni $\mathbf{f}_a/\mathbf{g}_a$ con $\mathbf{f}_a, \mathbf{g}_a \in \mathcal{O}_a$ e $\mathbf{g}_a \ne \mathbf{0}_a$. Sia poi $\mathcal{M}$ l'unione disgiunta degli $\mathcal{M}_a$. Ogni $\mathbf{q}_a \in \mathcal{M}_a$ verrà detto *germe di funzione meromorfa* in $a \in \mathbb{C}$.

Introduciamo una topologia su $\mathcal{M}$ in modo analogo a quanto fatto per $\mathcal{O}$. Sia $\mathbf{q}_a = \mathbf{f}_a/\mathbf{g}_a \in \mathcal{M}_a$, e (U, f), (U, g) rappresentanti di $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{g}_a$. Allora poniamo

$$W(U, f, g) = \{\mathbf{f}_z/\mathbf{g}_z \in \mathcal{M}_z \mid z \in U\}.$$

Esercizio 8.1. Dimostra che i $W(U, f, g)$ formano un sistema fondamentale d'intorni per un'unica topologia di Hausdorff su $\mathcal{M}$.

L'insieme $\mathcal{M}$ con questa topologia e con l'ovvia proiezione $p\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ è detto *fascio dei germi delle funzioni meromorfe* su $\mathbb{C}$.

A ogni $\mathbf{q}_a \in \mathcal{M}_a$ associamo un valore $\mathbf{q}_a(a) \in \hat{\mathbb{C}}$ e, se $\mathbf{q}_a \ne \mathbf{0}_a$, un numero intero, l'*ordine* $o(\mathbf{q}_a) \in \mathbb{Z}$, in questo modo: scriviamo $\mathbf{q}_a = \mathbf{f}_a/\mathbf{g}_a$, e siano (U, f), (U, g) rappresentanti di $\mathbf{f}_a$ e $\mathbf{g}_a$. Allora esistono h, $k \in \mathbb{N}$ tali che possiamo scrivere $f(z) = (z - a)^h f_1(z)$ e $g(z) = (z - a)^k g_1(z)$, con $f_1(a)$, $g_1(a) \ne 0$. Poniamo quindi $o(\mathbf{q}_a) = h - k$ e

$$\mathbf{q}_a(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } o(\mathbf{q}_a) > 0, \\ \infty & \text{se } o(\mathbf{q}_a) < 0, \\ f_1(a)/g_1(a) & \text{se } o(\mathbf{q}_a) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 8.2. Dimostra che l'ordine e il valore di un germe di funzione meromorfa sono ben definiti.

Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è aperto, indichiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ l'insieme delle sezioni continue di $\mathcal{M}$. A ogni $q \in \mathcal{M}(\Omega)$ possiamo associare una funzione meromorfa $Q\colon \Omega \to \hat{C}$ ponendo $Q(z) = \mathbf{q}_z(z)$, dove $\mathbf{q}_z = q(z)$. Viceversa, data una funzione meromorfa Q su Ω con insieme dei poli E, possiamo definire una sezione $q \in \mathcal{M}(\Omega)$ ponendo

$$q(z) = \begin{cases} \mathbf{Q}_z & \text{se } z \in \Omega \setminus E, \\ 1/(\mathbf{1/Q})_z & \text{se } z \in E. \end{cases}$$

Esercizio 8.3. Dimostra che in questo modo si è definita una bigezione fra sezioni di $\mathcal{M}$ su Ω e funzioni meromorfe su Ω.

Dunque una funzione meromorfa è localmente il quoziente di funzioni olomorfe. I germi di funzioni meromorfe possono essere scritti in maniera canonica come segue:

Proposizione 8.3: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in \Omega$ e $\mathbf{q}_a \in \mathcal{M}_a$. Allora:*
(i) *Sia $m = \max\{0, -o(\mathbf{q}_a)\}$. Allora esistono unici $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ e $\boldsymbol{\varphi}_a \in \mathcal{O}_a$ tali che*

$$\mathbf{q}_a = \sum_{j=1}^{m} a_j (\mathbf{z}_a - a)^{-j} + \boldsymbol{\varphi}_a,$$

dove $\mathbf{z}_a$ denota il germe in a dell'identità.
(ii) *Se $\mathbf{q}_a \neq \mathbf{0}_a$, sia $m = o(\mathbf{q}_a)$; allora esiste un unico $\boldsymbol{\psi}_a \in \mathcal{O}_a$ con $\boldsymbol{\psi}_a(a) \neq 0$ tale che*

$$\mathbf{q}_a = (\mathbf{z}_a - a)^m \boldsymbol{\psi}_a.$$

Dimostrazione: Scriviamo $\mathbf{q}_a = \mathbf{f}_a/\mathbf{g}_a$, e scegliamo rappresentanti (U, f) e (U, g); possiamo anche supporre che g non abbia zeri in $U \setminus \{a\}$. Posto $f(z) = (z-a)^h f_1(z)$ e $g(z) = (z-a)^k g_1(z)$ con $f_1(a)$, $g_1(a) \neq 0$, otteniamo

$$\frac{f}{g}(z) = (z-a)^{h-k} \psi(z),$$

dove $\psi = f_1/g_1$, e $\boldsymbol{\psi}_a$ soddisfa (ii).

Scrivendo $\psi(z) = \sum_j a_j (z-a)^j$ con $a_0 \neq 0$ otteniamo quindi (posto $m = h - k$)

$$\frac{f}{g}(z) = \sum_{j=m}^{\infty} a_{j-m} (z-a)^j,$$

e ponendo $\varphi(z) = \sum_{j \geq 0} a_{j-m} (z-a)^j$ otteniamo (i). □

Il teorema di Mittag-Leffler ha a che fare con la rappresentazione (i); il teorema di Weierstrass, che discuteremo nel prossimo paragrafo, ha a che fare con la rappresentazione (ii).

Data $q \in \mathcal{M}(\Omega)$, diremo *polo* (*zero*) di q un punto $a \in \Omega$ tale che $\mathbf{q}_a \notin \mathcal{O}_a$ (rispettivamente, $1/\mathbf{q}_a \notin \mathcal{O}_a$).

Esercizio 8.4. Dimostra che l'insieme dei poli (degli zeri) di una $q \in \mathcal{M}(\Omega)$ è un insieme discreto in Ω. Deduci che per ogni $a \in \Omega$ esiste un intorno $U \subset \Omega$ di a tale che $\mathbf{q}_z \in \mathcal{O}_z$ per ogni $z \in U \setminus \{a\}$.

In particolare, se E è l'insieme dei poli di $q \in \mathcal{M}(\Omega)$, allora $q \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$.

Il Corollario 8.2 può ora venire riformulato nel modo seguente:

Corollario 8.4: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $E \subset \Omega$ discreto. Scegliamo per ogni $a \in E$ una $\mathbf{p}_a \in \mathcal{M}_a$. Allora esiste $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ e inoltre $\mathbf{f}_a - \mathbf{p}_a \in \mathcal{O}_a$ per ogni $a \in E$.*

Dimostrazione: Basta scegliere per ogni $a \in E$ un rappresentante (U_a, p_a) di $\mathbf{p}_a$ olomorfo in $U_a \setminus \{a\}$ e poi applicare il Corollario 8.2. □

Vediamo di esprimere in modo diverso questo risultato. Sia $E = \{a_j\}_{j \geq 1}$ una numerazione dei punti di E, e per ogni $a_j \in E$ scegliamo un rappresentante (U_j, p_j) di $\mathbf{p}_{a_j}$; possiamo anche supporre che $p_j \in \mathcal{O}(U_j \setminus \{a_j\})$. Poniamo inoltre $U_0 = \Omega \setminus E$, e $p_0 \equiv 0$. I dati del problema di Mittag-Leffler si possono quindi riassumere in un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \geq 0}$ di Ω con associata a ogni U_j una $p_j \in \mathcal{M}(U_j)$ tale che $p_j - p_k \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$ per ogni j, $k \geq 0$ tali che $U_j \cap U_k \neq \varnothing$.

Il Teorema di Mittag-Leffler allora ci assicura l'esistenza di una $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che $f - p_j \in \mathcal{O}(U_j)$ per ogni $j \geq 0$. Ponendo $g_{jk} = p_k - p_j \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$ e $g_j = f - p_j \in \mathcal{O}(U_j)$, chiaramente abbiamo $g_{jk} = g_j - g_k$.

Viceversa, supponiamo di non avere la f, ma di poter trovare delle $g_j \in \mathcal{O}(U_j)$ tali che g_{jk} si scriva come $g_j - g_k$. Allora definiamo $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ ponendo $f = p_j + g_j$ su U_j; siccome

$$p_j + g_j = p_k - g_{jk} + g_j = p_k + g_k$$

su $U_j \cap U_k$, la f è ben definita su tutto $\Omega \setminus E$ e soddisfa le condizioni del Teorema di Mittag-Leffler.

La teoria della coomologia dei fasci permette di inquadrare meglio questa situazione. Dato un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ di Ω, e un fascio $\mathcal{F}$ su Ω, possiamo definire i seguenti oggetti:

- Una 0-*cocatena* $g \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ è data dalla scelta di una $g_j \in \mathcal{F}(U_j)$ per ogni $j \geq 0$, dove $\mathcal{F}(U_j)$ indica l'insieme delle sezioni di $\mathcal{F}$ su U_j.
- Una 1-*cocatena* $g \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ è data dalla scelta di $g_{jk} \in \mathcal{F}(U_j \cap U_k)$ per ogni j, k tali che $U_j \cap U_k \neq \varnothing$.
- Un'applicazione $d: C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ data da $(dg)_{jk} = g_j - g_k$. Se $dg = 0$, diremo che g è uno 0-*cociclo;* le 1-cocatene della forma dg saranno chiamate 1-*cobordi*. L'insieme degli 0-cocicli verrà indicato con $Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, e l'insieme degli 1-cobordi con $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Vale la pena di notare una cosa: $g \in Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ sse esiste una $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ tale che $g_j = f|_{U_j}$ per ogni $j \geq 0$. In altre parole, $Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ può essere identificato con $\mathcal{F}(\Omega)$.

Nella nostra trattazione del problema di Mittag-Leffler avevamo quindi incontrato i seguenti oggetti: una 0-cocatena $\{g_j\} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, uno 0-cociclo $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ e una 1-cocatena $\{g_{jk}\} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. E le p_j? Introduciamo il fascio $\mathcal{M}/\mathcal{O}$, definito come l'unione disgiunta degli $\mathcal{M}_a/\mathcal{O}_a$, dove questo è il quoziente come spazi vettoriali: è l'insieme delle classi laterali (rispetto all'addizione) di $\mathcal{O}_a$ in $\mathcal{M}_a$. Dunque le $\{p_j\}$ definiscono uno 0-cociclo di $\mathcal{M}/\mathcal{O}$: infatti, ogni p_j definisce (per proiezione) un elemento di $[p_j] \in \mathcal{M}/\mathcal{O}(U_j)$, e siccome $p_j - p_k \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$, abbiamo che $[p_j] - [p_k] = 0$ in $\mathcal{M}/\mathcal{O}(U_j \cap U_k)$. In altri termini, le p_j definiscono una sezione di $\mathcal{M}/\mathcal{O}$.

Quindi per dimostrare il Corollario 8.4 basta far vedere che certe 1-cocatene sono in realtà degli 1-cobordi. Non tutte le 1-cocatene possono essere dei cobordi: occorre come minimo che

$$g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0 \quad \text{su } U_j \cap U_k \cap U_l. \tag{8.1}$$

Nota che questo implica $3g_{jj} = 0$, cioè $g_{jj} \equiv 0$ su U_j, e quindi $g_{jk} + g_{kj} = 0$ su $U_j \cap U_k$.

Una 1-cocatena che soddisfa la (8.1) sarà detta 1-*cociclo*, e indicheremo con $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ l'insieme degli 1-cocicli. Siccome $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \subseteq Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, viene naturale considerare il *primo gruppo di coomologia*

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Quindi il Corollario 8.4 è conseguenza del seguente teorema (noto come la soluzione al *primo problema di Cousin*):

Teorema 8.5: *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un aperto. Allora* $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = (0)$ *per ogni ricoprimento aperto* $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ *di* Ω.

Dimostrazione: Sia $g \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$; dimostreremo prima che è un cobordo C^∞, e poi che è un cobordo olomorfo.

Sia $\{\alpha_j\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathfrak{U}$. Allora $\alpha_l g_{jl} \in C^\infty(U_j)$ (ed è uguale a zero in $U_j \setminus U_l$); poniamo

$$\tilde{g}_j = \sum_{l \neq j} \alpha_l g_{jl};$$

essendo la somma localmente finita, $\tilde{g}_j \in C^\infty(U_j)$. Inoltre

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_j - \tilde{g}_k &= \sum_{l \neq j,k} \alpha_l (g_{jl} - g_{kl}) + \alpha_k g_{jk} - \alpha_j g_{kj} \\
&= \sum_{l \neq j,k} \alpha_l g_{jk} + \alpha_k g_{jk} + \alpha_j g_{jk} = \left(\sum_l \alpha_l \right) g_{jk} = g_{jk},
\end{aligned}$$

e quindi g è un cobordo C^∞.

Ora,

$$\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \bar{z}} \equiv 0$$

su $U_j \cap U_k$; quindi possiamo trovare una funzione $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi|_{U_j} = \partial \tilde{g}_j / \partial \bar{z}$. Il Teorema 7.11 ci fornisce allora una $u \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\partial u / \partial \bar{z} = \varphi$; poniamo $g_j = \tilde{g}_j - u$ su U_j. Allora chiaramente $g_j - g_k = g_{jk}$, e inoltre $\partial g_j / \partial \bar{z} = 0$; quindi $g_j \in \mathcal{O}(U_j)$ e abbiamo dimostrato che g è un cobordo olomorfo. □

9. Il teorema di Weierstrass

Cominciamo con una versione del teorema di Runge per funzioni mai nulle:

Teorema 9.1: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e $K \subset \Omega$ compatto tale che $\Omega \setminus K$ non abbia componenti connesse relativamente compatte in Ω. Sia $f \in \mathcal{O}(K)$ tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in K$. Allora dato $\varepsilon > 0$ esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $F(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ e $\|F - f\|_K < \varepsilon$.*

Dimostrazione: Per ipotesi, $K = \hat{K}_\Omega$. Quindi, per la Proposizione 7.4, $\mathbb{C} \setminus K$ ha una componente connessa illimitata U_0 e un numero finito di componenti connesse limitate, $U_1, \ldots, U_p$; inoltre $U_j \not\subset \Omega$. Scegliamo $a_j \in U_j \setminus \Omega$ per $j = 1, \ldots, p$.

Grazie all'Esercizio 7.3 possiamo supporre che f sia una funzione razionale olomorfa e mai nulla in un intorno di K, per cui f è della forma

$$f(z) = c \prod_{\nu=1}^{d} (z - b_\nu)^{m_\nu},$$

dove $c \in \mathbb{C}^*$, $m_\nu \in \mathbb{Z}^*$ e $b_\nu \in \mathbb{C} \setminus K$, per $\nu = 1, \ldots, d$.

Fissiamo $R > 0$ tale che $K \subset \Delta_R$, e poniamo $a_0 = R$. Per $j = 0, \ldots, p$ sia $A_j = \{\nu \mid 1 \leq \nu \leq d,\, b_\nu \in U_j\}$. Allora possiamo scrivere

$$f(z) = c\, G(z)(z - R)^{-n_0} \prod_{j=0}^{p} \prod_{\nu \in A_j} \left(\frac{z - b_\nu}{z - a_j} \right)^{m_\nu},$$

dove

$$G(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)^{-n_j}$$

e $n_j = \sum_{\nu \in A_j} m_\nu$. Nota che $G(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$.

Ora, se $\nu \in A_j$ allora a_j e b_ν appartengono alla stessa componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$. Quindi la Proposizione 1.9 ci fornisce una $\varphi_{\nu,j} \in \mathcal{O}(K)$ tale che $(z - b_\nu)/(z - a_j) = \exp\bigl(\varphi_{\nu,j}(z)\bigr)$. Inoltre possiamo trovare $\varphi_0 \in \mathcal{O}(\Delta_R)$ tale che $z - R = \exp\bigl(\varphi_0(z)\bigr)$. Quindi esiste $h \in \mathcal{O}(K)$ tale che

$$f(z) = c\, G(z) e^{h(z)}.$$

Il Teorema 7.3 allora per ogni $\delta > 0$ ci fornisce una $H \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\|H - h\|_K < \delta$. Ponendo $F = c\, G e^H$, è chiaro che $\|F - f\|_K < \varepsilon$ per δ abbastanza piccolo; siccome $F(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, è fatta. $\square$

Ci servirà anche il seguente:

Esercizio 9.1. Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni complesse limitate definite su un insieme S tale che la serie $\sum_n |u_n|$ converge uniformemente su S. Dimostra che il prodotto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \bigl(1 + u_n(z)\bigr)$$

converge uniformemente su S, e che $f(z_0) = 0$ per qualche $z_0 \in S$ sse si ha $u_n(z_0) = -1$ per qualche n. (*Suggerimento:* studia il comportamento di $\log |f(z)|$.)

Come conseguenza troviamo il *Teorema di Weierstrass:*

Teorema 9.2: (Weierstrass) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, ed $E \subset \Omega$ discreto. Sia poi data una funzione $k\colon E \to \mathbb{Z}$. Allora esiste $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$, non ha zeri in $\Omega \setminus E$ e $(z - a)^{-k(a)} f(z)$ è olomorfa e non nulla in un intorno di a per ogni $a \in E$.*

Dimostrazione: Sia $\{K_\nu\}$ la successione di compatti data dal Lemma 7.10. Poniamo

$$F_\nu(z) = \prod_{a \in E \cap K_\nu} (z - a)^{k(a)};$$

in particolare, $F_{\nu+1}/F_\nu \in \mathcal{O}(K_\nu)$ e non ha zeri in K_ν. Sia

$$\delta_\nu = \min_{z\in K_\nu} \left|\frac{F_{\nu+1}(z)}{F_\nu(z)}\right| > 0.$$

Il Teorema precedente ci fornisce una $g_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ senza zeri in Ω tale che

$$\left\|\frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} - g_\nu\right\|_{K_\nu} < \frac{2^{-\nu-1}\delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}};$$

dunque ponendo $h_\nu = 1/g_\nu$ otteniamo

$$\left\|\frac{F_{\nu+1}}{F_\nu}h_\nu - 1\right\|_{K_\nu} < 2^{-\nu-1}. \tag{9.1}$$

Definiamo allora $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ ponendo

$$f = F_\nu \prod_{\mu\geq\nu}\left(\frac{F_{\mu+1}}{F_\mu}h_\mu\right)\cdot h_1\cdots h_{\nu-1}$$

su K_ν. Grazie all'Esercizio 9.1 e a (9.1), il prodotto infinito converge a una funzione olomorfa mai nulla su K_ν; quindi è facile verificare che f è ben definita e soddisfa le condizioni richieste. □

Il Teorema di Weierstrass ha due conseguenze molto significative. La prima riguarda l'espressione globale di funzioni meromorfe:

Corollario 9.3: *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Allora ogni funzione meromorfa $q \in \mathcal{M}(\Omega)$ è il quoziente di due funzioni olomorfe in Ω.*

Dimostrazione: Sia E l'insieme dei poli di q. Utilizzando come funzione $k\colon E \to \mathbb{Z}$ la funzione $k(a) = -o(\mathbf{q}_a)$, Il Teorema 9.2 ci fornisce una funzione $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $f = qg$ è olomorfa in Ω, e $q = f/g$. □

La seconda riguarda la prolungabilità di funzioni olomorfe. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, e $X \subset \partial\Omega$ chiuso. Diremo che una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ è *singolare* su X se per ogni curva $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ tale che $\gamma(t) \in \Omega$ per $t \in [0,1)$ e $\gamma(1) \in X$ il germe $\mathbf{f}_{\gamma(0)}$ non è prolungabile lungo γ (ovviamente, il problema è prolungarlo sopra $\gamma(1)$). Se f è singolare su $\partial\Omega$ diremo che Ω è il *dominio d'esistenza* di f.

Teorema 9.4: *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Allora Ω è il dominio d'esistenza di una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Dimostrazione: Sia $\{K_\nu\}$ la successione di compatti data dal Lemma 7.10. Scegliamo una successione $\{D_n\}$ di dischi tali che $\overline{D_n} \subset \Omega$, $K_1 \subset D_1 \cup \cdots \cup D_{n_1}$, $K_{\nu+1} \setminus \mathring{K}_\nu \subset D_{n_\nu+1} \cup \cdots \cup D_{n_{\nu+1}}$, $D_n \cap K_\nu = \varnothing$ se $n \geq 1 + n_{\nu+1}$ e tali che il raggio di D_n sia minore di $1/\nu$ per $n_\nu < n \leq n_{\nu+1}$. In particolare, la famiglia $\{D_n\}$ è localmente finita, il raggio dei D_n tende a 0 per $n \to +\infty$, e $\Omega = \cup_n D_n$.

Fissiamo una successione di punti distinti $\{a_n\}$ tali che $a_n \in D_n$; il Teorema 9.2 ci fornisce allora una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla tale che $f(a_n) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Vogliamo dimostrare che Ω è il dominio d'esistenza di f.

Sia $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva con $\gamma(t) \in \Omega$ per $t \in [0,1)$ e $a = \gamma(1) \in \partial\Omega$. Supponiamo che $\mathbf{f}_{\gamma(0)}$ sia prolungabile lungo γ, e sia $\mathbf{F}_a$ il germe in a così ottenuto. In altre parole,

$$\mathbf{F}_a = \lim_{t\to 1^-} \mathbf{f}_{\gamma(t)} \in \mathcal{O}_a.$$

Sia (D,F) un rappresentante di $\mathbf{F}_a$, dove $D = D(a,\rho)$ è un disco aperto. $N(D,F)$ è un intorno di $\mathbf{F}_a$, e quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $t \in [1-\varepsilon, 1)$ allora $\gamma(t) \in D$ e $\mathbf{f}_{\gamma(t)} = \mathbf{F}_{\gamma(t)}$.

Sia U la componente connessa di $D \cap \Omega$ contenente $\gamma\big([1-\varepsilon,1)\big)$; in particolare, $F|_U \equiv f|_U$. Poniamo $D' = D(a,\rho/2)$. Ora, essendo $a \in \partial(D' \cap U) \cap \partial\Omega$, $D' \cap U$ non è relativamente compatto in Ω; quindi deve intersecare necessariamente infiniti dischi D_{n_k} (in quanto l'unione di un numero finito di tali dischi è relativamente compatta in Ω). Siccome il raggio di questi dischi tende a zero (e in particolare è definitivamente minore di $\rho/4$), abbiamo trovato infiniti dischi contenuti in D che intersecano U; essendo U una componente connessa, necessariamente questi infiniti dischi sono contenuti in U. Dunque F ha infiniti zeri nell'insieme $D(a, 3\rho/4) \subset\subset D$, e questo implica $F \equiv 0$ su D. Ma allora $f|_{D\cap U} \equiv 0$; essendo Ω connesso otteniamo $f \equiv 0$, contraddizione. □

Nota: Questo è del tutto falso in più variabili, come osservato da Hartogs. Consideriamo per esempio il seguente dominio:

$$D = \{(z, w) \mid |z| < 1,\ 1/2 < |w| < 1\} \cup \{(z, w) \mid 1/2 < |z| < 1,\ |w| < 1\} \subset \mathbb{C}^2,$$

e sia $f \in \mathcal{O}(D)$ (che vuol dire, per esempio, che è continua e olomorfa in entrambe le variabili separatamente). Se $|z| < 3/4$ e $1/2 < |w| < 1$, la formula di Cauchy di una variabile ci dice che

$$f(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_{3/4}} \frac{f(\zeta, w)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Ma ora, il lato destro di quest'equazione è ben definito per ogni (z, w) tale che $|z| < 3/4$ e $|w| < 1$; inoltre è olomorfo in z e w (derivazione sotto il segno di integrale). Quindi abbiamo definito un'estensione olomorfa di f a tutto Δ^2 *qualunque sia* $f \in \mathcal{O}(D)$. In altre parole, D non è il dominio di esistenza di alcuna funzione olomorfa di due variabili.

Esercizio 9.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, ed $E \subset \Omega$ discreto. Supponiamo di avere per ogni $a \in E$ un intorno U_a di a in Ω, una funzione $\varphi_a \in \mathcal{O}(U_a \setminus \{a\})$ e un intero $k_a > 0$. Dimostra che esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ tale che $f - \varphi_a$ è olomorfa in a e $\mathrm{ord}_a(f - \varphi_a) > k_a$ per tutti gli $a \in E$.

Esercizio 9.3. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, e f_1, $f_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ privi di zeri in comune. Dimostra che esistono g_1, $g_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ tali che $f_1 g_1 + f_2 g_2 \equiv 1$.

Esercizio 9.4. Sia h una funzione olomorfa in un intorno dell'origine. Dimostra che l'equazione

$$e^{1/z} - 1 - h(z) = 0$$

ha soluzione in qualunque insieme della forma $\{0 < |z| < \varepsilon\}$.

Esercizio 9.5. Dimostra che la funzione $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ data da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots$$

non può essere prolungata olomorficamente ad alcun dominio strettamente più grande di Δ. (*Suggerimento:* nota che $f(z^2) = f(z) - z$.)

10. Esercizi finali

Esercizio 10.1. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$, e $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe uniformemente limitate sui compatti di Ω e mai nulle. Supponiamo che esista $z_0 \in \Omega$ tale che $f_n(z_0) \to 0$. Dimostra che $f_n \to 0$.

Esercizio 10.2. Dimostra che se $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ è iniettiva e $f(\Delta)$ è convesso, allora $f(\Delta_r)$ è convesso per ogni $0 < r < 1$.

Esercizio 10.3. Dimostra che se $f \in \mathcal{S}$ si ha

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \le \frac{1+r}{1-r}.$$

(*Suggerimento:* applica il Teorema 5.6 alla trasformata di Kœbe.)

Esercizio 10.4. Siano $\Omega_2 \subseteq \Omega_1 \subset \mathbb{C}$, e $f_j \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Omega_j)$ rivestimenti con $f_1(0) = f_2(0)$. Dimostra che $|f_2'(0)| \le |f_1'(0)|$, con uguaglianza sse $\Omega_1 = \Omega_2$.

Esercizio 10.5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $E \subset \Omega$ discreto. Associamo a ogni $a \in E$ un numero complesso $w_a \in \mathbb{C}$. Dimostra che esiste una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $f(a) = w_a$ per ogni $a \in E$.