Analisi 2, Ingegneria Civile $29 - 06 - 2025$

Esercizio 1 Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{4\sin x}{3y^2(1+\cos^2 x)} \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 Calcolare il flusso del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (\log(2+z^2), e^{xz} - y^3, 3y^2 z + e^{x^2+y^2}),$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 4,\ z \geq 0\},$$

orientata secondo la direzione normale ν tale che $\nu(0,0,2) = (0,0,1)$.

Esercizio 3 Trovare tutti i punti critici della seguente funzione e stabilirne la natura (massimo locale, minimo locale o sella)

$$f(x,y) = x^2(y-1) + \frac{2x^3}{3} - 2xy + \frac{y^2}{2}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 L'equazione e' a variabili separate quindi abbiamo

$$\frac{3}{4}\int_1^{y(x)} s^2 ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin s}{1+\cos^2 s} ds$$

$$\iff \frac{1}{4}y^3(x) - \frac{1}{4} = -[\operatorname{arctg}(\cos x)]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$\iff \frac{1}{4}y^3(x) = \frac{1}{4} - \operatorname{arctg}(\cos x)$$

e quindi

$$y(x) = (-4\operatorname{arctg}(\cos x) + 1)^{\frac{1}{3}}$$

Esercizio 2 La superficie Σ non e' chiusa ma la possiamo chiudere aggiungendo il tappo $C = \{(x,y,0)|x^2+y^2 \leq 4\}$. Quindi se indichiamo con

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^4 \leq 4,\ z \geq 0\}$$

abbiamo che

$$\partial\Omega = C \cup \Sigma$$

(osserviamo che la normale esterna ad Ω coincide con ν su Σ poiche' coincidono in $(0,0,2)$ mentre la normale esterna ad Ω lungo il tappo C e' data da $(0,0,-1)$). Usiamo quindi il teorema della divergenza e deduciamo che il flusso cercato e' uguale a

$$Flusso(\vec{F},\Sigma,\nu) = \int\int\int_\Omega div\vec{F} dxdydz - Flusso(\vec{F},C,(0,0,-1))$$

Da calcolo diretto si vede che $div\vec{F} = 0$ e quindi resta solo da calcolare

$$Flusso(\vec{F},C,(0,0,-1)) = -\int\int_{x^2+y^2\leq 4} e^{x^2+y^2} dxdy = -2\pi\int_0^2 e^{\rho^2}\rho d\rho$$

$$= -\pi[e^{\rho^2}]_0^2 = -\pi(e^4-1)$$

quindi troviamo

$$Flusso(\vec{F},\Sigma,\nu) = \pi(e^4-1).$$

Esercizio 3 I punti cirtici della funzione $f(x,y)$ sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2xy - 2x + 2x^2 - 2y = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$$

La prima equazione si scrive come segue:

$$2y(x-1)+2x(x-1)=0 \iff 2(x-1)(x+y)=0$$

quindi abbiamo le alterative $x=1$ oppure $y=-x$. Se $x=1$ dalla seconda equazione troviamo $y=0$ e quindi il punto $(1,0)$. Se invece $y=-x$ allora dalla seconda equazione $x^2-3x=0$ ossia $x=0$ oppure $x=3$. Se $x=0$ allora dalla seconda equazione $y=0$ mentre se $x=3$ allora sempre dalla seconda equazione $y=-9+6=-3$ e quindi i punti $(0,0),(3,-3)$. Quindi abiamo i tre punti critici $(1,0),(0,0),(3,-3)$. Per studiarne la natura scriviamo la matrice hessiana:

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} 2y-2+4x & 2x-2 \\ 2x-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi abbiamo

$$Hf(1,0)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che e' definita positiva, quindi minimo locale;

$$Hf(0,0)=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

che e' indefinita, quindi sella;

$$Hf(3,-3)=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

che e' indefinita, quindi sella.