Compito di Analisi 2 del $09-06-2025$**, Ingegneria Civile**

Esercizio 1 Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = e^t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2 Provare che esistono $\max_K f$ e $\min_K f$ dove

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 4y^4 + x^2y^2 \leq 1\}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Calcolare esplicitamente $\max_K f$ e $\min_K f$.

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_\Omega z \, dxdydz,$$

dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \min\{z^2, 1\},\ z \in [0,2]\}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1 Il polinomio caratteristico associato all' equazione omogenea e'

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

che ha come radici $\lambda = 1, 6$. Quindi la soluzione generale dell' omogenea e'

$$Ae^t + Be^{6t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell' equazione completa usando il metodo di variazione delle costanti, quindi una soluzione del tipo:

$$y(t) = A(t)e^t + B(t)e^{6t}.$$

Calcoliamo

$$y' = A'e^t + Ae^t + B'e^{6t} + 6Be^{6t}$$

quindi se imponiamo

$$A'e^t + B'e^{6t} = 0 \tag{1}$$

otteniamo

$$y' = Ae^t + 6Be^{6t}.$$

Imponiamo ora che y risolva l' equazione quindi:

$$\begin{aligned} e^t &= y'' - 7y' + 6y \\ &= A'e^t + Ae^t + 6B'e^{6t} + 36Be^{6t} \\ &\quad -7Ae^t - 42Be^{6t} + 6Ae^t + 6Be^{6t} \\ &= A'e^t + 6B'e^{6t} \end{aligned}$$

che a sua volta, grazie ad (1) equivale a

$$5B'e^{6t} = e^t$$

quindi possiamo prendere $B(t) = -\frac{1}{25}e^{-5t}$ ed anche da (1) abbiamo $A'e^t = -\frac{1}{5}e^t$ e quindi $A = -\frac{1}{5}t$. Abbiamo quindi come soluzione particolare

$$-\frac{1}{5}te^t - \frac{1}{25}e^t.$$

Quindi la soluzione generale diventa

$$y(t) = Ae^t + Be^{6t} - \frac{1}{5}te^t - \frac{1}{25}e^t, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni di Cauchy si trova

$$1 = y(0) = A + B - \frac{1}{25}$$

$$0 = A + 6B - \frac{1}{5} - \frac{1}{25}$$

e quindi da semplici calcoli $A = \frac{6}{5}$, $B = -\frac{4}{25}$. Pertanto la soluzione cercata e'

$$\frac{6}{5}e^t - \frac{4}{25}e^{6t} - \frac{1}{5}te^t - \frac{1}{25}e^t.$$

Esercizio 2 La funzione f e' continua (perche' e' un polinomio) e l' insieme K e' chiuso (essendo insieme di punti dove una funzione continua e' minore o uguale a 1). Inoltre K e' limitato, infatti se $(x, y) \in K$ allora $x^4 \leq 1$ e $y^4 \leq 1$ ossia $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Per il calcolo esplicito del massimo e del minimo cerchiamo i punti critici interni:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

che implica $(x, y) = (0, 0) \in K$. Inoltre in $(0, 0)$ la funzione f vale 0.
Vediamo di studiare il bordo con i moltiplicatori di Lagrange. Il primo sistema equivale a

$$\begin{cases} 4x^3 + 2xy^2 = 0 \\ 16y^3 + 2x^2y = 0 \\ x^4 + 4y^4 + x^2y^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo

$$2x(2x^2 + y^2) = 0$$

e quindi troviamo $x = 0$ oppure $2x^2 + y^2 = 0$ e quindi necessariamente $x = 0$. Dalla seconda equazione deduciamo che $y = 0$ e quindi troviamo come unica soluzione $(x, y) = (0, 0)$ che non e' compatibile con la terza equazione. Quindi il primo sistema non ha soluzioni. Passiamo al secondo

$$\begin{cases} 2x = \lambda(4x^3 + 2xy^2) \\ 2y = \lambda(16y^3 + 2x^2y) \\ x^4 + 4y^4 + x^2y^2 = 1 \end{cases}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} 2x(1 - 2\lambda x^2 - \lambda y^2) = 0 \\ 2y(1 - 8\lambda y^2 - \lambda x^2) = 0 \\ x^4 + 4y^4 + x^2y^2 = 1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione abbiamo $x = 0$ oppure $1 - 2\lambda x^2 - \lambda y^2 = 0$ e dalla seconda $y = 0$ oppure $1 - 8\lambda y^2 - \lambda x^2 = 0$. Scegliendo $x = 0$ troviamo dalla terza equazione $4y^4 = 1$ e quindi i punti $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ dove la funzione f vale $\frac{1}{2}$; similmente se $y = 0$ troviamo dalla terza equazione i punti $(\pm 1, 0)$ dove la funzione f vale 1. Quindi resta da considerare il sistema

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x^2 - \lambda y^2 = 0 \\ 1 - 8\lambda y^2 - \lambda x^2 = 0 \\ x^4 + 4y^4 + x^2y^2 = 1. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni troviamo

$$\lambda x^2 = \frac{7}{15} \text{ e } \lambda y^2 = \frac{1}{15}. \tag{2}$$

Da cio' deduciamo che $\lambda \neq 0$ e quindi

$$x^2 = \frac{7}{15\lambda} \text{ e } y^2 = \frac{1}{15\lambda}.$$

Combinando queste informazioni con la terza equazione troviamo

$$\frac{49}{225\lambda^2} + \frac{4}{225\lambda^2} + \frac{7}{225\lambda^2} = 1$$

da cui $\lambda^2 = \frac{60}{225}$ e quindi $\lambda = \pm\frac{2\sqrt{15}}{15}$. Ritornando a (2) abbiamo che λ deve essere > 0 e quindi resta solo da considerare $\lambda = \frac{2\sqrt{15}}{15}$

$$x^2 = \frac{7}{15} \times \frac{15}{2\sqrt{15}}, \quad y^2 = \frac{1}{15} \times \frac{15}{2\sqrt{15}}$$

dove la funzione f vale $\frac{4}{\sqrt{15}}$. Quindi riassumendo i valori da confrontare sono $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{\sqrt{15}}\}$. Pertanto per confronto diretto si ha che il minimo vale 0 e il massimo vale $\frac{4}{\sqrt{15}}$.

Esercizio 3 Procediamo per sezioni ed osserviamo che, le sezioni hanno la seguente struttura:

$$A_z = \{x^2 + y^2 \leq 1\},\ z \in [1,2]$$
$$A_z = \{x^2 + y^2 \leq z^2\},\ z \in [0,1]$$

quindi procedendo per sezioni l' integrale diventa

$$\int_0^1 (\int\int_{x^2+y^2\leq z^2} zdxdy)dz + \int_1^2 (\int\int_{x^2+y^2\leq 1} zdxdy)dz$$
$$= \pi \int_0^1 z^3 dz + \pi \int_1^2 zdz = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{4}\pi$$