Funzioni lipschitziane

Due definizioni equivalenti dello spazio di Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d)$

Ricordiamo la seguente definizione.

Definizione 1. *Data $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, diciamo che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ se esistono $v_1, \dots, v_d \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tali che*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j \varphi(x) u(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_j(x)\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Definiamo inoltre le derivate parziali ed il gradiente in senso debole di u come:

$$\partial_j u := v_j \qquad e \qquad \nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u).$$

Inoltre, ricordiamo che data una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, esiste una successione $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u - \varphi_n|^2\, dx + \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j u - \partial_j \varphi_n|^2\, dx \Big) = 0.$$

Lemma 2. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se esistono due costanti $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \le C|y| \qquad \text{per ogni} \qquad |y| < \varepsilon,$$

allora $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $j = 1, \dots, d$ si ha $\|\partial_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C$.

Dimostrazione. Per ogni $j \in \{1, \dots, d\}$ ed ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiamo

$$L_j(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \partial_j \varphi(x)\, dx.$$

Osserviamo che, per il teorema della convergenza dominata, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)\, dx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\big(\varphi(x+te_j) - \varphi(x)\big)\, dx\,.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} |L_j(\varphi)| \le \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)\, dx \right| &= \lim_{t\to 0} \left| \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\Big(\varphi(x+te_j) - \varphi(x)\Big)\, dx \right| \\ &= \lim_{t\to 0} \left| \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(u(x-te_j) - u(x)\Big)\varphi(x)\, dx \right| \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Quindi L_j si può estendere ad un funzionale lineare limitato su $L^2(\mathbb{R}^d)$. Esiste quindi una funzione $v_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tale che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j\varphi(x) u(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_j(x)\, dx.$$

□

Lemma 3. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora,*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \le |y| \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{per ogni} \qquad y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Fissiamo $y \in \mathbb{R}^d$ e consideriamo una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora,

$$|\varphi(x+y) - \varphi(x)|^2 \le \left| \int_0^1 y \cdot \nabla\varphi(x+ty)\, dt \right|^2 \le \int_0^1 |y\cdot\nabla\varphi(x+ty)|^2\, dt \le |y|^2 \int_0^1 |\nabla\varphi|^2(x+ty)\, dt.$$

Integrando in $x \in \mathbb{R}^d$ e usando il teorema di Fubini, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+y) - \varphi(x)|^2\, dx &\le |y|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla\varphi|^2(x+ty)\, dt\, dx \\ &= |y|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2(x+ty)\, dx\, dt = |y|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2\, dx. \end{aligned}$$

Siccome $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $\mathbb{R}^d$, abbiamo la tesi. □

Le funzioni lipschitziane a supporto compatto sono in $H^1(\mathbb{R}^d)$

Proposizione 4 (Lipschitz $\Rightarrow$ Sobolev)**.** *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ ed $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana supportata in B_R con costante di Lipschitz $L > 0$,*

$$|u(x) - u(y)| \le L|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Allora, $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Inoltre, se $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u)$ è il gradiente debole di u, allora

$$\partial_j u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad e \qquad \|\partial_j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le L\,,$$

per ogni $j = 1, \dots, d$. Più precisamente,

$$|\nabla u| \le L\,,$$

dove $|\nabla u|$ è la norma euclidea del gradiente debole.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, abbiamo che

$$\|u(x + y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \le |B_{R+\varepsilon}|^{1/2} L|y| \qquad \text{per ogni} \qquad |y| < \varepsilon.$$

Quindi, per Lemma 2, abbiamo che $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Sia ora $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ una qualsiasi funzione test. Allora

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u(x)\varphi(x)\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx\right| \\
&= \lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\Big(\varphi(x + te_j) - \varphi(x)\Big)\,dx\right| \\
&= \lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d} \Big(u(x - te_j) - u(x)\Big)\varphi(x)\,dx\right| \le L\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Quindi, approsssimando (in $L^1(\mathbb{R}^d)$) la funzione $\frac{1}{|B_r|}1_{B_r(x_0)}$ con funzioni regolari, otteniamo

$$\left|\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} \partial_j u(x)\,dx\right| \le L.$$

Siccome $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ed $r > 0$ sono arbitrarie, otteniamo che

$$|\partial_j u(x_0)| \le L \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d\,.$$

Di conseguenza

$$\partial_j u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad \|\partial_j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le L\,.$$

Analogamente, otteniamo che per ogni vettore fissato $\nu \in \partial B_1$ si ha

$$|\nu \cdot \nabla u(x_0)| \le L \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d\,,$$

e quindi

$$|\nabla u(x_0)| \le L \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x_0 \in \mathbb{R}^d\,.$$

□

Le funzioni Sobolev con gradiente debole in L^∞ sono lipschitziane

Proposizione 5. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Se $|\nabla u| \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora u è Lipschitziana e*

$$|u(x) - u(y)| \le \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^d$. Fissiamo un raggio $r > 0$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx - \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(y_0)} u(x)\,dx\right| &\le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} \Big|u(x_0 + x) - u(y_0 + x)\Big|\,dx \\
&\le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\int_0^1 |x_0 - y_0|\,|\nabla u|(y_0 + t(x_0 - y_0) + x)\,dt\,dx \\
&\le L|x - y|.
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni coppia di punti di Lebesgue, x_0, y_0, abbiamo

$$|u(x_0) - u(y_0)| \le L|x_0 - y_0|.$$

Infine, oserviamo che possiamo definire u in un punto qualsiasi $z \in \mathbb{R}^d$ come

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u(x_n),$$

dove x_n è una successione di punti di Lebesgue che converge a z. □

Funzioni lipschitziane e lo spazio $W^{1,\infty}$

Definizione 6. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^\infty(\Omega)$. Diciamo che $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ se esistono funzioni*

$$v_1, \dots, v_d \in L^\infty(\Omega),$$

tali che

$$\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega v_j(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

per ogni $j = 1, \dots, d$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. La funzione v_j è detta parziale derivata debole di u. Come al solito, scriveremo $\partial_j u$ al posto di v_j e ∇u al posto di $(v_1, \dots, v_d)$.

Teorema 7. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^\infty(\Omega)$.*

(i) *Se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|u(x) - u(y)| \le L|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \Omega,$$

allora $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \le L$.

(ii) *Se $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$, allora*

$$|u(x) - u(y)| \le \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in B_r(x_0).$$

Estensione di funzioni lipschitziane

Proposizione 8. *Siano K un insieme chiuso in $\mathbb{R}^d$, $L > 0$ ed $u : K \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$|u(x) - u(y)| \le L|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in K.$$

Allora, esiste una funzione $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che $U \equiv u$ su K e

$$|U(x) - U(y)| \le L|x - y| \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ definiamo:

$$U(x) := \inf\Big\{u(y) + L|x - y| \ :\ y \in K\Big\}.$$

Step 1. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $U(x) > -\infty$. Infatti, fissato $y_0 \in K$, per ogni $y \in K$ abbiamo:

$$\begin{aligned} u(y) + L|x - y| &\ge \Big(u(y_0) - L|y - y_0|\Big) + L|x - y| \\ &= u(y_0) + L\Big(|x - y| - |y - y_0|\Big) \\ &\ge u(y_0) - L|x - y_0|. \end{aligned}$$

Siccome y è arbitrario, otteniamo

$$U(x) \ge u(y_0) - L|x - y_0|.$$

Step 2. $u \equiv U$ su K. Infatti, se $x \in K$, allora per costruzione

$$U(x) \le u(x).$$

D'altre parte, per ogni $y \in K$ abbiamo che

$$-L|x - y| \le u(x) - u(y) \le L|x - y|$$

e quindi

$$u(x) \le u(y) + L|x - y|.$$

Prendendo l'estremo inferiore in y, otteniamo:

$$u(x) \leq \inf \Big\{ u(y) + L|x-y| \ : \ y \in K \Big\} = U(x).$$

Step 3. Dimostriamo ora che U è L-lipschitziana su $\mathbb{R}^d$. Prendiamo due punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$. Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $y_1 \in K$ tale che

$$U(x_1) \leq u(y_1) + L|x_1 - y_1| \leq U(x_1) + \varepsilon\,.$$

Allora,

$$\begin{aligned}
U(x_2) - U(x_1) &= \inf \Big\{ u(y) + L|x_2 - y| \ : \ y \in K \Big\} - \Big(u(y_1) + L|x_1 - y_1| \Big) + \varepsilon \\
&\leq \Big(u(y_1) + L|x_2 - y_1| \Big) - \Big(u(y_1) + L|x_1 - y_1| \Big) + \varepsilon \\
&\leq L\Big(|x_2 - y_1| - |x_1 - y_1| \Big) + \varepsilon \\
&\leq L|x_2 - x_1| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, otteniamo

$$U(x_2) - U(x_1) \leq L|x_2 - x_1|.$$

Analogamente

$$U(x_1) - U(x_2) \leq L|x_2 - x_1|.$$

□

Corollario 9. *Sia Ω un insieme aperto e limitato in $\mathbb{R}^d$ ed $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in \partial\Omega.$$

Allora, esiste una funzione lipschitziana $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che: $U \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $U \equiv u$ su $\partial\Omega$.