Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

V foglio di compendio alla teoria
Note alle lezioni del 11 marzo e del 12 marzo 2002 (V.M.Tortorelli)

1-FORME DIFFERENZIALI CHIUSE ED ESATTE

Per le principali definizioni, notazioni, e dimostrazioni, non specificate in questa nota si rimanda al libro “Analisi matematica II: Funzioni di piú variabili” J.P.Cecconi-G.Stampacchia, II edizione Liguori 1983 (nel seguito [CS]).

Notazioni: -Se L è una applicazione lineare da $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^n$ e $v \in \mathbf{R}^m$ per indicare il risultato di L su v si useranno indifferentemente le seguenti notazioni: Lv, $L(v)$, $L[v]$.
Se $L \in \mathbf{R}^{n*}$ si userà anche la notazione $< L, v >$.
Se poi M è un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^k$ la composizione di L ed M si indicherà indifferentemente con: $M \circ L$, $M \cdot L$, ML.
- Si indicherà con $(u \cdot v)$ il prodotto scalare canonico tra due elementi u e v di $\mathbf{R}^n$.
Con e_i, $1 \leq i \leq n$, si indica l'i-esimo elemento della base canonica di $\mathbf{R}^n$ per cui si abbia $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.
- Con e^i, $1 \leq i \leq n$, si indica l'i-esimo elemento della base canonica di $(\mathbf{R}^n)^*$, ovvero il funzionale lineare per cui $< e^i, e_k >= \delta^i_k$.
Seguendo l'usuale convenzione per la rappresentazione della composizione di applicazioni lineari con il prodotto righe per colonne di matrici conviene considerare le n-ple di numeri reali vettori di $\mathbf{R}^n$ come matrici “colonna” $n \times 1$, anche se per motivi di comodità tipografica verranno scritte come righe.
Le coordinate degli elementi di $(\mathbf{R}^n)^*$ rispetto alla base canonica saranno considerati quindi come matrici “riga” $1 \times n$.
- Il differenziale della i-esima proiezione, dx_i, è la 1-forma differenziale che vale costantemente e^i. Ogni 1-forma differenziale $\omega(x)$ si può quindi scrivere come $\sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$.
Un campo di vettori $v(x)$ determina univocamente l'operatore differenziale $f(x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial v(x)}(x)$, sulle funzioni $f \in C^\infty$. Per questo il campo che vale costantemente e_i si scrive $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ed un qualsiasi campo v si identifica con $\sum_{i=1}^n v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$.
- Le relazioni di equivalenza definite in 45.1-b) [CS] per cammini regolari C^1 si considererà estesa a tutti i cammini C^1 e verrà indicata con $\sim$. Si osserva che in questo caso un cammino regolare a tratti ma non regolare non può essere equivalente ad un cammino regolare nemmeno nel senso di 45.8-2) [CS].

Teorema 0: Sia A un aperto connesso di $\mathbf{R}^n$, se $f : A \to \mathbf{R}$ ha derivate parziali prime nulle allora f è costante su A (cfr. 6.1, 7.8 [CS]).

Corollario 0: Se ω è esatta su A_1, ω è esatta su A_2, e $A_1 \cap A_2$ è connesso allora ω è esatta su $A_1 \cup A_2$.

Osservazione 1: - Data la 1-forma differenziale $\omega =$ in A ed un cammino γ solo C^1 a tratti si definisce analogamente al caso dei cammini regolari a tratti: $\int_\gamma \omega =: \int_a^b < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) > \, dt$.
- Con la stessa dimostrazione fatta per mostrare l'invarianza del lavoro di una forma differenziale su cammini regolari a tratti che siano equivalenti per cambiamenti di parametrizzazioni

regolari a tratti crescenti, si prova che se $\varphi : [a;b] \to [c;d]$ è C^1 a tratti, $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, e ove esiste $\varphi' \geq 0$ allora

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_{\gamma\circ\varphi} \omega$$

- Si osserva che dato un cammino regolare $\gamma(t)$ a tratti definito su $[a;b]$ e data $\varphi(s) : [a;b] \to [a;b]$ di classe C^1, $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, con $\varphi' \geq 0$ e $\varphi' = 0$ esattamente nei punti s per cui non esiste $\gamma'(\varphi(s))$ si ha che $\gamma\circ\varphi$ è un cammino C^1 con lo stesso sostegno di γ. Infatti $\frac{d^\pm \gamma\circ\varphi}{ds}(s) = \frac{d^\pm\gamma}{dt}(\varphi(s))\frac{d\varphi}{ds}(s)$.

Proposizione 1: Per ogni 1-forma ω in A e per ogni cammino $\gamma \in C^1([a;b], A)$ si ha:

$$\left|\int_\gamma \omega\right| \;\leq\; \max_{x\in[\gamma]} \sqrt{\sum_{i-1}^{n} \omega_i^2(x)} \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Esempio 1: L'esempio tipico di forma chiusa non esatta su un aperto è

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \ , \quad (x,y) \in A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

La forma è chiusa in A poichè su $\mathbf{R}^2 \setminus \{x = 0\}$ è il differenziale di $\mathrm{artan}\frac{y}{x}$, mentre su $\mathbf{R}^2 \setminus \{y = 0\}$ è il differenziale di $-\mathrm{artan}\frac{x}{y}$.
La forma non è esatta in A, infatti se fosse $\omega = df$, le $f(x,-1)$ ed $f(1,y)$ sarebbero crescenti, e quindi $f(-1,-1) < f(1,-1) < f(1,1)$, d'altronde $f(x,1)$ ed $f(-1,y)$ sarebbero decrescenti ottenendo $f(-1,-1) > f(-1,1) > f(1,1)$.

Teorema 1: Sia A aperto di $\mathbf{R}^n$, e ω 1-forma su A.
1- Sono equivalenti
 i) ω è esatta su A
 ii) il lavoro di ω su un cammino regolare a tratti in A dipende solo dagli estremi del cammino.
 iii) il lavoro di ω su un cammino regolare a tratti in A e chiuso è nullo.

2- Nel caso, una primitiva su una componente connessa B di A è data, fissando $x_B \in B$, da:

$$f(x) = \int_{\gamma_{x_B,x}} \omega \ , \quad x \in B$$

essendo $\gamma_{x_B,x}$ un qualsiasi cammino (in B) congiungente x_B ad x.

DIMOSTRAZIONE: Ci si riduce a quella di 48.7, 48.8 [CS], grazie al fatto che un aperto di $\mathbf{R}^n$ ha un'insieme numerabile di componenti connesse, ed ognuna di esse è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$. Per l'osservazione 1 le curve possono essere prese solo C^1 a tratti.

Lemma 1: Sia A aperto di $\mathbf{R}$, $g(x,t) \in C\,(A \times [a;b])$ per cui esista $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \in C\,(A \times [a;b])$.
Si ha: $\exists \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{[a;b]} g(x,t)\, dt \;=\; \int_{[a;b]} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\, dt.$

DIMOSTRAZIONE: Fissato $x \in A$ aperto, sia $r > 0$ $\overline{B(x,r)} \subset A$.
Si prova che $R_h(t) = \frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h}$ converge uniformemente in $t \in [a;b]$, per $h \to 0$ a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$.
Quindi si conclude per i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Per il teorema di Lagrange si ha dato $h \in [-r;r]$ che vie è $\theta = \theta_{h,t} \in]0;1[$

$$\left|R_h(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x+\theta_{t,h},t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|$$

quindi $\displaystyle \sup_{t\in[a;b]}\left|R_h(t)-\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sup_{\substack{|z-x|\leq|h|\\ t\in[a;b]}}\left|\frac{\partial g}{\partial x}(z,t)-\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|$

Essendo $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ uniformemente continua sul compatto $\overline{B(x,r)}\times[a;b]$ il secondo membro dell'ultima diseguaglianza è infinitesimo per $h\to 0$.

Teorema 2:(Lemma di Poincaré elementare) Sia A aperto stellato di $\mathbf{R}^n$, e ω 1-forma C^1 su A e chiusa. Allora ω è esatta su A.

DIMOSTRAZIONE: cfr 48.9 [CS].

Definizione 1: Si dirà che una forma è localmente esatta su un' aperto se per ogni punto dell'aperto vi è un intorno su cui la forma ammette primitiva.

Corollario 1: Sia A aperto di $\mathbf{R}^n$, e ω 1-forma C^1 su A.
Allora ω è chisua in A se e solo se ω è localmente esatta in A.

Osservazione 2: Le forme differenziali e i campi di vettori su un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^n$ vengono definiti mediante funzioni da A in $(\mathbf{R}^n)^*$ e rispettivamente in $\mathbf{R}^n$ grazie al fatto che vi è un unico sistema di coordinate canonico dato dal prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$.
Per apprezzare la differenza tra i tre concetti conviene per prima cosa pensare a come agiscono funzioni e forme. È importante notare come diversamente variano una funzione e una forma differenziale al variare della "parametrizzazione" del dominio su cui sono definite.

$$\mathbf{x}=\Psi(\mathbf{z})$$

$$\begin{tikzcd}
 & B_z \arrow[dl, "f\circ\Psi"'] \arrow[d, "df\circ\Psi\cdot d\Psi"] \arrow[rr, "\Psi"'] & & A_x \arrow[d, "df"] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbf{R}^n & \mathbf{R}^{m*} & & \mathbf{R}^{n*} & \mathbf{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$d\mathbf{x}\mapsto d\Psi\cdot d\mathbf{z}$$

$$dx_i\mapsto d\Psi_i(y)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\Psi_i}{\partial z_j}dz_j$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^m & B_z \arrow[d, "\Psi^\sharp\omega"] \arrow[rr, "\Psi"'] & & A_x \arrow[d, "\omega"] & \mathbf{R}^n \\
I \arrow[u, "\gamma'"] \arrow[ur, "\gamma"] & \mathbf{R}^{m*} & & \mathbf{R}^{n*} & I \arrow[u, "d\Psi\circ\gamma\cdot\gamma'"'] \arrow[ul, "\Psi\circ\gamma"']
\end{tikzcd}$$

$$\Psi^\sharp\omega \ =_{\text{def}}\ \omega\circ\Psi\cdot d\Psi$$

$$\Psi^\sharp\omega \ = \ \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i\circ\Psi\frac{\partial\Psi_i}{\partial z_j}\right)dz_j$$

Esempio 2: Si consideri la forma $\omega = y\,dx - x\,dy$ su $\mathbf{R}^2 = A$. Si considerino le coordinate polari $\Psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\Psi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Si ha

$$x = \rho\cos\theta\ ,\quad y = \rho\sin\theta$$

$$dx \mapsto \cos\theta\,d\rho\ -\ \rho\sin\theta\,d\theta\ ,\quad dy \mapsto \sin\theta\,d\rho\ +\ \rho\cos\theta\,d\theta$$

$$\Psi^\sharp\omega = -\rho^2\,d\theta$$

Definizione 2: Se $\Psi : B \to A$ è una mappa C^1 da un aperto B di $\mathbf{R}^m$ ad un aperto A di $\mathbf{R}^n$ ed ω una forma differenziale su A si definisce la forma differenziale *rimontata* (pull-back) di ω mediante Ψ su B come $\omega\circ\Psi\cdot d\Psi$. Essa viene denotata con $\Psi^\sharp\omega$.

Teorema 3: Sia $\Psi : B \subseteq \mathbf{R}^m \to A \subseteq \mathbf{R}^n$ differenziabile con continuità. Siano ω 1-forma su A, f funzione differenziabile su A, γ cammino regolare a tratti in B. Si ha:

$$df\circ\Psi = \Psi^\sharp df\ ,\quad \int_\gamma \Psi^\sharp\omega = \int_{\Psi\circ\gamma}\omega\ ,\quad \omega\,\text{esatta} \implies \Psi^\sharp\omega\,\text{esatta}\ ,\quad \omega\,\text{loc. esatta} \implies \Psi^\sharp\omega\,\text{loc.esatta}$$

se poi $\omega \in C^1\ ,\quad \Psi \in C^2$ si ha: $\quad \omega$ chiusa $\implies \Psi^\sharp\omega$ chiusa

Grazie a queste osservazioni e al corollario 0 è un utile esercizio provare la seguente versione del lemma di Poincaré.

Lemma 2: Se ω è localmente esatta, non necessariamente C^1, su un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^2$ contenente $[0;1]^2$, allora ω è esatta su un'aperto contenente Q.

DIMOSTRAZIONE traccia: La forma ha primitiva in un aperto contenente un segmento $[0;1]\times\{s\}$. Infatti per compattezza del segmento e locale integrabilità della forma si trovano dei rettangoli aperti $P_i =]t_i - \delta_i; t_i + \delta_i[\times] - h + s; s + h[$, $1 \le i \le n \in \mathbf{N}$, $0 \le t_1 < \ldots t_N \le 1$ che ricoprono il segmento, per cui: su ogni P_i la forma ω ha primitiva, e ogni P_i interseca al più P_{i-1} o P_{i+1} oltre se stesso. Si ha quindi che l'intersezione di $P_1 \cup \ldots \cup P_i$ con P_{i+1} è il connesso $P_i \cap P_{i+1}$ e si applica induttivamente il corollario 0 ottenendo che ω è esatta su $P_1 \cup \ldots \cup P_N =]t_1 - \delta_1; t_N + \delta_N[\times]s - h; s + h[$.

Osservando che $[0;1]^2 = \bigcup_{s\in[0;1]}[0;1]\times\{s\}$ per compattezza di $[0;1]^2$ e per quanto sopra dimostrato si ottiene che $[0;1]^2$ si ricopre con un numero finito di rettangoli aperti $R_1, \ldots R_M$ di eguale base, $R_i =] - \delta; 1 + \delta[\times]s_i - h_i; s_i + h_i[$, $0 \le s_1 < \ldots < s_M \le 1$, su ognuno dei quali la forma ω ha primitiva, e che si intersecano solo se uno è il successore dell'altro nella numerazione. Si conclude come sopra.

Teorema 4: Se ω è localmente esatta, non necessariamente C^1, su un aperto A stellato allora è esatta su tutto A.

DIMOSTRAZIONE: Si consideri un'arbitraria curva chiusa γ che sia C^1 da $[0;1]$ in A, $\gamma(0) = \gamma(1)$. Va provato che il lavoro di ω su γ è nullo.
A meno di riparametrizzazioni (osservazione 1) si assume che anche $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, e quindi si assume che $\gamma : \mathbf{R} \to A$ sia una funzione C^1 e 1-periodica.

Sia c un centro del dominio stellato A. Si consideri

$$\Psi(t,s) \mapsto sc + (1-s)\gamma(t)\ ,\quad \Psi : \mathbf{R}^2 \to A$$

Ψ è una funzione C^1. Si considerino quindi i cammini che danno i lati di $[0;1]^2$:

$$\sigma_1(t)=(t,0)\ ,\quad \sigma_2(s)=(1,s)\ ,\quad \sigma_3(t)=(1-t,1)\ ,\quad \sigma_4(s)=(0,1-s)$$

Si definisca il cammino del bordo di $[0;1]^2$ come loro somma:

$$\sigma(t)=\sigma_1\oplus\sigma_2\oplus\sigma_3\oplus\sigma_4=\begin{cases}(t,0) & t\in[0;1]\\(1,t-1) & t\in[1;2]\\(3-t,1) & t\in[2;3]\\(0,4-t) & t\in[3;4]\end{cases}$$

Si ha: $\begin{cases}\Psi\circ\sigma_1=\gamma\\ \Psi(\sigma_2(s))=-\Psi(\sigma_4(s))=sc+(1-s)\gamma(1)\\ \Psi\circ\sigma_3\equiv c\end{cases}$.

Si conclude osservando che $\Psi^\sharp\omega$ è localmente esatta su $[0;1]^2$, quindi per il lemma 2 è esatta su $[0;1]^2$ ed ha integrale nullo sul cammino chiuso σ:

$$\begin{aligned}\int_\gamma\omega=\int_{\Psi\circ\sigma_1}\omega\ &=\int_{\Psi\circ\sigma_1}\omega+\int_{\Psi\circ\sigma_2}\omega+\int_{\Psi\circ\sigma_3}\omega+\int_{\Psi\circ\sigma_4}\omega=\\&=\int_{\sigma_1}\Psi^\sharp\omega+\int_{\sigma_2}\Psi^\sharp\omega+\int_{\sigma_3}\Psi^\sharp\omega+\int_{\sigma_4}\Psi^\sharp\omega=\int_\sigma\Psi^\sharp\omega=0\end{aligned}$$

Osservazione 3: Il metodo usato per dimostrare il teorema 4 consiste nel provare l'asserto in un caso geometrico molto semplice e quindi nello "scaricare" la complessità geometrica che può avere γ sulla maggior complessià analitica che potrebbe avere $\Psi^\sharp\omega$ rispetto a ω e quindi usare le regole di calcolo date dal teorema 3.

Definizione 3: Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$ e siano P, $Q\in A$. Siano γ_0 e γ_1 due cammini C^k in A aventi come primo estremo P e come secondo estremo Q.
Si dice che γ_0 e γ_1 sono C^k-omotopi in A con *estremi fissati* se esiste

$$\begin{array}{l}\Gamma(t,s)[0;1]\times[0;1]\to A\ ,\quad \Gamma \text{ è restrizione di una funzione } C^k\\ \Gamma(0,s)=P\ ,\quad \Gamma(1,s)=Q\\ t\mapsto\Gamma(t,0)\sim\gamma_0\ ,\quad t\mapsto\Gamma(t,1)\sim\gamma_1\end{array}$$

Una siffatta Γ si chiama *omotopia* (ad estremi fissati) di classe C^k in A tra γ_0 e γ_1. Se $k=0$ si dirà solo che i cammini sono omotopi in A ad estremi fissati e che Γ è un'omotopia in A ad estremi fissati tra di essi.

Osservazione 4: La relazione di essere C^k-omotopi con estremi fissati è una relazione di equivalenza nelle famiglia dei cammini C^k in A con estremi fissati P e Q.

Teorema 5: Sia ω 1-forma differenziale C^1 chiusa in un aperto A di $\mathbf{R}^n$. Siano γ_0 e γ_1 due cammini C^2-omotopi in A con estremi fissati. Allora

$$\int_{\gamma_0}\omega=\int_{\gamma_1}\omega.$$

DIMOSTRAZIONE: A meno di una riparametrizzazione regolare si può supporre che i due cammini siano entrambi definiti su $[0;1]$.

Se Γ è l'omotopia C^2 con estremi fissati tra di essi si osservi che

$$\frac{\partial\Gamma_j}{\partial s}(0,s)=\frac{\partial\Gamma_j}{\partial s}(1,s)=0$$

Si può supporre $\Gamma(t,0)=\gamma_0(t)$ e $\Gamma(t,1)=\gamma_1(t)$. Coerentemente si denoterà $\Gamma(t,s)$ con $\gamma_s(t)$.

Sia $\mathcal{L}(s)=\int_{\gamma_s}\omega=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\omega_i(\gamma_s(t))\frac{\partial\Gamma_i}{\partial t}(t,s)\,dt.$

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (lemma 1) si ha:

$$\frac{d\mathcal{L}}{ds}(s)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t))\frac{\partial\Gamma_j}{\partial s}(t,s)\frac{\partial\Gamma_i}{\partial t}(t,s)\,dt \quad +\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\omega_i(\gamma_s(t))\frac{\partial^2\Gamma_i}{\partial s\partial t}(t,s)\,dt=$$

per il teorema di Schwarz

$$\text{''}\qquad +\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\omega_i(\gamma_s(t))\frac{\partial^2\Gamma_i}{\partial t\partial s}(t,s)\,dt=$$

integrando per parti, poichè $\frac{\partial\Gamma_j}{\partial s}(0,s)=\frac{\partial\Gamma_j}{\partial s}(1,s)=0$

$$\text{''}\qquad -\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t))\frac{\partial\Gamma_j}{\partial t}(t,s)\frac{\partial\Gamma_i}{\partial s}(t,s)\,dt=$$

essendo ω chiusa

$$\text{''}\qquad -\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(\gamma_s(t))\frac{\partial\Gamma_j}{\partial t}(t,s)\frac{\partial\Gamma_i}{\partial s}(t,s)\,dt=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}(\gamma_s(t))\frac{\partial\Gamma_j}{\partial s}(t,s)\frac{\partial\Gamma_i}{\partial t}(t,s)\,dt \quad -\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(\gamma_s(t))\frac{\partial\Gamma_i}{\partial s}(t,s)\frac{\partial\Gamma_j}{\partial t}(t,s)\,dt=\ \mathbf{0}$$

Teorema 6: Sia ω 1-forma differenziale localmente esatta in un aperto A di $\mathbf{R}^n$. Siano γ_0 e γ_1 due cammini C^1-omotopi in A con estremi fissati. Allora

$$\int_{\gamma_0}\omega=\int_{\gamma_1}\omega.$$

DIMOSTRAZIONE: A meno di una riparametrizzazione regolare si può supporre che i due cammini siano entrambi definiti su $[0;1]$.

Sia Γ è l'omotopia C^1 con estremi fissati tra di essi.
Si può supporre $\Gamma(t,0)=\gamma_0(t)$ e $\Gamma(t,1)=\gamma_1(t)$. Si procede in maniera analoga a quanto fatto per dimostrare il teorema 4.

Si considerino quindi i cammini che danno i lati di $[0;1]^2$ con orientazione questa volta positiva:

$$\sigma_0(t)=(t,0)\ ,\quad \sigma_1(t)=(t,1)\ ,\quad \sigma_2(s)=(0,s)\ ,\quad \sigma_3(s)=(1,s)$$

Si ha: $\begin{cases}\Gamma\circ\sigma_0=\gamma_0\\ \Gamma\circ\sigma_1=\gamma_1\\ \Gamma\circ\sigma_2\equiv\gamma_0(0)=\gamma_1(0)\\ \Gamma\circ\sigma_3\equiv\gamma_0(1)=\gamma_1(1)\end{cases}$. Si conclude osservando che $\Gamma^\sharp\omega$ è localmente esatta su

$[0;1]^2$, per il lemma 2 è esatta su $[0;1]^2$ e quindi i suoi integrali lungo $\sigma_0 \oplus \sigma_3$ e lungo $\sigma_2 \oplus \sigma_1$ che sono cammini con gli stessi estremi, sono eguali per il teorema 1:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\Gamma\circ\sigma_0} \omega = \int_{\Gamma\circ\sigma_0} \omega + \int_{\Gamma\circ\sigma_3} \omega \quad &= \int_{\sigma_0} \Gamma^\sharp\omega + \int_{\sigma_3} \Gamma^\sharp\omega = \\ &= \int_{\sigma_2} \Gamma^\sharp\omega + \int_{\sigma_1} \Gamma^\sharp\omega = \int_{\Gamma\circ\sigma_2} \omega + \int_{\Gamma\circ\sigma_1} \omega = \int_{\Gamma\circ\sigma_1} \omega = \int_{\gamma_1} \omega\end{aligned}$$

Definizione 4: Siano γ_0 e γ_1 due cammini chiusi e C^k in A aperto di $\mathbf{R}^n$.
Si dice γ_0 e γ_1 sono C^k-omotopi in A se esiste

$$\begin{aligned}&\Gamma(t,s)[0;1]\times[0;1] \to A\ , \quad \Gamma \text{ è restrizione di una funzione } C^k(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^n)\\ &\Gamma(0,s) = \Gamma(1,s)\\ &t \mapsto \Gamma(t,0) \sim \gamma_0\ , \quad t \mapsto \Gamma(t,1) \sim \gamma_1\end{aligned}$$

Una siffatta Γ si chiama *omotopia* (di cammini chiusi) di classe C^k in A tra γ_0 e γ_1. Se $k=0$ si dirà solo che Γ è un'omotopia in A di cammini chiusi, e γ_0, γ_1 si diranno omotopi in A (come cammini chiusi).

Osservazione 5: La relazione di C^k omotopia in A è una relazione di equivalenza tra cammini chiusi e C^k in A.

Definizione 5: Un aperto A di $\mathbf{R}^n$ si dice C^k-*semplicemente connesso* se ogni cammino chiuso e C^k è C^k-omotopo (come cammino chiuso) ad un cammino costante (ad un punto). Invece di C^0-semplicemente connesso si dirà solamente *"semplicemente connesso"*.

Teorema 7: Se un aperto A è C^1 semplicemente connesso allora ogni forma localmente integrabile in A non necessariamente C^1 è esatta in A.

DIMOSTRAZIONE: Per il teorema 1 va verificato che per ogni $\tilde\gamma$ cammino chiuso regolare a tratti da $[0;1]$ in A il lavoro di ω su $\tilde\gamma$ è nullo.

Si consideri una $\varphi : [0;1] \to [0;1]$ per cui valgano le condizioni enunciate nell'osservazione 1: $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, φ crescente strettamente, con derivata nulla nei punti s per cui $\tilde\gamma$ non ha derivata in $\varphi(s)$. Si ha che $\gamma = \tilde\gamma\circ\varphi$ è C^1 e chiuso.
Come sottolineato nell'osservazione 1 il lavoro di ω su $\tilde\gamma$ è eguale a quello su γ. Quindi basta mostrare che quest'ultimo è nullo.

Grazie alla C^1 semplice connessione di A si consideri un'omotopia in A che sia C^1 tra γ e un cammino costantemente eguale a $c \in A$:

$$\Gamma(t,s); [0;1]\times[0;1] \to A\ , \quad \Gamma(0,s) = \Gamma(1,s)\ , \quad \Gamma(t,0) = \gamma(t)\ , \quad \Gamma(t,1) \equiv c.$$

A questo punto ponendo $\Gamma(t,s) = \Psi(t,s)$ si procede esattamente come per la dimostrazione del teorema 4.

Osservazione 6: - Conviene considerare per $n=3$ e $k=2$ la condizione (C) di 49.6 [CS]. Come scritta tale condizione non è soddisfatta da nessun aperto. Per rendere tale condizione non vacua va aggiunta l'assunzione che ψ sia restrizione di una funzione $C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$ e T-periodica. Per precisare la differenza tra la nozione data dalla condizione (C) modificata e la definizione 5 si è costretti ad introdurre le seguenti nozioni.

Definizione 4bis: Sia $\gamma : [a;a+T] \to A$ un cammino chiuso in un aperto A di $\mathbf{R}^n$. Diremo che γ è C^k-*chiuso* se è restrizione di una funzione $C^k(\mathbf{R};\mathbf{R}^n)$ che sia T-periodica.

Ciò è equivalente a dire che $\frac{d^h\gamma}{dt^h}(a) = \frac{d^h\gamma}{dt^h}(a+T)$, $0 \le h \le k$.

Siano γ_0 e γ_1 due cammini C^k-chiusi in A aperto di $\mathbf{R}^n$.
Si dice che γ_0 e γ_1 sono C^k-omotopi in A come cammini C^k-chiusi se esiste

-$\Gamma(t,s)[0;1] \times [0;1] \to A$, Γ è restrizione di una funzione $C^k(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^n)$;

-per ogni $s \in [0;1]$ la funzione $t \mapsto \Gamma(t,s)$ è 1-periodica;

-$t \mapsto \Gamma(t,0) \sim \gamma_0$, $t \mapsto \Gamma(t,1) \sim \gamma_1$.

Una siffatta Γ si chiama *omotopia di cammini C^k-chiusi* in A tra γ_0 e γ_1.

Definizione 5bis: Un aperto A di $\mathbf{R}^n$ si dice *semplicemente connesso per cammini C^k-chiusi* se ogni cammino C^k-chiuso in A è C^k-omotopo come cammino C^k-chiuso ad un cammino costante (ad un punto).

- Nel caso di $k = 0$ queste nozioni sono equivalenti a quelle delle definizioni 4 e 5.

Problema: La condizione 49.6-(C) in [CS], corretta come sopra detto, dovrebbe essere equivalente alla definizione 5bis appena enunciata.

Teorema 7bis: Se un aperto A è C^2-semplicemente connesso per cammini C^2-chiusi allora ogni forma C^1 chiusa in A è esatta in A

DIMOSTRAZIONE: il lettore interessato può seguire la traccia data nella dimostrazione di 49.6 [CS] fino a pagina 597 per l'argomento di approssimazione, e quindi usare semplicemente il lemma di Poincaré sulle forme rimontate dalle Ψ_n.

Per procedere oltre sono richiesti passi la cui dimostrazione richiede espedienti tecnici basati sul raffinamento della cosìdetta regolarizzazione per convoluzione. Essi possono essere riassunti nel seguente:

Lemma 3: Se due cammini chiusi e C^k in A sono omotopi allora sono anche C^k omotopi.

Teorema 8: Se γ_0 è omotopa con estremi fissi a γ_1 in A e ω è localmente esatta in A allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Teorema 9: Se un aperto A è semplicemente connesso ogni forma localmente esatta in A è integrabile in A.

Vale la pena osservare la seguente importante osservazione di immediata dimostrazione:

Proposizione 2:[Le classi di omotopia sono aperte per la convergenze uniforme]
Siano γ, $\tilde{\gamma} : [0;1] \to A$ due cammini in A aperto di $\mathbf{R}^n$. Se

$$\max_{t\in[0;1]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| \le \frac{\delta}{2}\ , \quad \delta =_{\rm def} \mathrm{dist}\left([\gamma], \mathbf{R}^n \setminus A\right).$$

allora la funzione

$$\Gamma : (t,s) \in [0;1] \times [0;1] \longmapsto s\tilde{\gamma}(t) + (1-s)\gamma(t) \in \mathbf{R}^n$$

è a valori in A. Quando poi γ, $\tilde{\gamma}$ abbiano gli stessi estremi e siano C^k risulterà una C^k omotopia ad estremi fissi tra di essi in A, e quando siano C^k-chiusi risulterà una C^k-omotopia tra cammini C^k-chiusi.

Da questa proposizione, dal teorema 8 sopra enunciato, e dalle proprietà di approssimazione uniforme di funzioni continue con funzioni regolari segue che è ben posta la seguente definizione:

Definizione 6: Data una forma ω localmente esatta in un aperto A , per ogni cammino solo continuo $\gamma : [a; b] \to A$ si definisce:

$$\int_\gamma \omega \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \omega$$

ove $\gamma_n \in C^1([a; b], A)$, $\gamma_n(a) = \gamma(a)$, $\gamma_n(b) = \gamma(b)$, e $\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a;b]} |\gamma_n(t) - \gamma(t)| = 0$. Si osservi che la successione degli integrali è definitivamente costante.