Calcolo Differenziale ed Integrazione, A. A. 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

IV foglio di compendio alla teoria: dal 18 dicembre 2001 al 21 gennaio 2002

Nozione formale	Base intuitiva	Principale applicazione
SPAZIO METRICO, DISTANZA	DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE	LUNGHEZZA DI CURVE
SPAZIO NORMATO	RIGA E COMPASSO distanza invariante per translazioni e coerente con dilatazioni.	LINEARIZZAZIONE
SPAZIO PREHILBERTIANO	CONFRONTO DI ANGOLI perpendicolarità (punti di minima distanza) come ortogonalità	VOLUMI E LUNGHEZZE
COMPLETEZZA	CONTINUO GEOMETRICO procedure di calcolo affidabili (successioni di Cauchy) convergono ad elementi ideali.	TEOREMI DI ESISTENZA
COMPATTEZZA (TOTALE LIMITATEZZA PIÚ COMPLETEZZA)	INSIEMI FINITI proprietà locali possono studiarsi riconducendosi al finito	TEOREMI DI ESISTENZA

	DEFINIZIONE
SPAZIO METRICO (INSIEME CON DISTANZA)	$(M,d),\ d{:}M\times M\to\mathbb{R}$ $d(x,y)\ \le\ d(x,z)+d(z,y)$ $d(x,y)\ =\ d(y,x)$ $d(x,y)=0\ \Leftrightarrow\ x=y$
SPAZIO NORMATO (SPAZIO VETTORIALE CON NORMA)	$(V,\nu),\ V$ spazio vettoriale, $\nu{:}V\to\mathbb{R}$ $\nu(x+y)\ \le\ \nu(x)+\nu(y)$ $\nu(\lambda\cdot x)\ =\ \lvert\lambda\rvert\nu(x)$ $\nu(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0$
SPAZIO PREHILBERTIANO (SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE)	$(V,\mathcal{B}),\ V$ spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ [$\mathbb{R}$], $\mathcal{B}{:}V\times V\to\mathbb{C}$ [$\mathbb{R}$], $u\mapsto\mathcal{B}(u,v_0)$ lineare $\mathcal{B}(u,v)=\overline{\mathcal{B}(v,u)}$ $\mathcal{B}(u,u)\ \ge\ 0$ $\mathcal{B}(u,u)=0\ \Leftrightarrow\ u=0$
SPAZIO COMPLETO successione di Cauchy $\Downarrow$ successione convergente	(M,d), spazio metrico $\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon{:}\ \forall n,\ m\ \ge n_0\ \ d(x_n,x_m)\ \le\ \varepsilon$ $\Downarrow$ $\exists x\in M\ :\ \ d(x_n,x)\to 0,\ n\to\infty$
SPAZIO TOTALMENTE LIMITATO ricopribile con un numero finito di palle di raggio arbitrariamente piccolo	(M,d), spazio metrico $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n=n_\varepsilon\ \exists\ x_1\ldots x_n\in M$ $\sup_{x\in M}\min_{1\le i\le n}\ \ d(x,x_i)\le\ \varepsilon$
SPAZIO COMPATTO (sequenzialmente) ogni successione ha una sottosuccessione convergente nello spazio	(M,d), spazio metrico $\forall\ \mathbf{x}{:}\mathbb{N}\to M$ $\exists\ \mathbf{k}{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ k_n\to+\infty,\ n\to+\infty$ $\exists\ y\in M\ \ \ d(x_{k_n},y)\to 0,\ n\to+\infty$

GLOSSARIO	DEFINIZIONE	NOTAZIONE
PALLE APERTE di centro x e raggio r	(M,d), spazio metrico, $x\in M$ $\{\ y\in M\ :\ d(x,y)<r\ \}$	$B(x,r)$
PALLE CHIUSE di centro x e raggio r	(M,d), spazio metrico, $x\in M$ $\{\ y\in M\ :\ d(x,y)\leq r\ \}$	$\bar{B}(x,r)$
INTORNO di un punto x	(M,d), spazio metrico, $x\in M$ $U\in M\ :\exists\ r>0\quad B(x,r)\subseteq U$	$U\in\mathcal{I}_x$
APERTO (sottoinsieme) intorno di ogni suo elemento	(M,d), spazio metrico, $A\subseteq M$ $\forall\ x\in A,\quad A\in\mathcal{I}_x$	$A\in\mathcal{A}_d$
CHIUSO (sottoinsieme) con complementare aperto	(M,d), spazio metrico, $C\subseteq M$ $M\backslash C\in\mathcal{A}_d$	$C\in\mathcal{C}_d$
INTERNO (di sottoinsiemi) il piú grande aperto contenuto	(M,d), spazio metrico, $E\subseteq M$ $\bigcup\{A\in\mathcal{A}\ :\ A\subset E\ \}$	$\mathring{E}$
CHIUSURA (di sottoinsiemi) il piú piccolo chiuso contenente	(M,d), spazio metrico, $E\subseteq M$ $\bigcup\{C\in\mathcal{C}\ :\ E\subset C\ \}$	$\overline{E}$
SUCCESSIONI DI CAUCHY	(M,d), spazio metrico, $\mathbf{x}:\mathbb{N}\to M$ $\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon\colon\ \forall n,\ m\ \geq n_0\quad d(x_n,x_m)\ \leq\ \varepsilon$	
SUCCESSIONE CONVERGENTE ad un punto x	(M,d), spazio metrico, $\mathbf{x}:\mathbb{N}\to M,\ x\in M$ $d(x_{k_n},x)\to 0,\ n\to+\infty$	$x_n\to_d x$
SEQUENZIALMENTE CHIUSO sottoinsieme per cui una successsione convergente nello spazio ambiente a valori nel sottoinsieme ha limite nel sottoinsieme stesso	(M,d), spazio metrico, $E\subseteq M,\ x\in E$ $\mathbf{x}:\mathbb{N}\to E,\ x_n\to x\in M\quad\Rightarrow\quad x\in E$	

in uno spazio metrico l'insieme ambiente e l'insieme vuoto sono aperti
in uno spazio metrico unione arbitraria di aperti ed intersezione finita di aperti sono aperte
un sottoinseme é chiuso in uno spazio metrico se e solo se é chiuso per successioni
in uno spazio metrico l'eventuale limite di una successione é unico
un sottoinsieme di uno spazio metrico completo é chiuso se e solo se é metrico completo per la distanza ristretta
uno spazio compatto é completo
uno spazio completo é compatto se e solo se é totalmente limitato

Nota : In generale la chiusura di una palla non é la palla chiusa con stesso raggio e stesso centro.

1. **Distanze indotte da norme.** Se V è uno spazio vettoriale ν é una norma su V si ha che $d_\nu(u,v) =: \nu(u-v)$ é una distanze su V. Viceversa data una distanza d su V per cui:

$$d(u,v) = d(u+w, v+w) \text{ invarianza per translazioni}$$

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v) \text{ proprietá di Talete}$$

allora $\nu_d(u) =: d(0,u)$ é una norma, e $d_{\nu_d} = d$.

Dim.: - $d_\nu(u,v) = \nu(u-v) = \nu(v-u) = d_\nu(v,u)$; $0 = d_\nu(u,v) = \nu(u-v) \Leftrightarrow u = v$; $d_\nu(u,v) = \nu(u-v) = \nu(u-w+(w-v)) \leq \nu(u-w) + \nu(w-v) = d(u,w) + d(w,v)$.

- $0 = \nu_d(u) = d(0,u) \Leftrightarrow u = 0$; $\nu_d(\lambda u) = d(0,\lambda u) = d(\lambda 0, \lambda u) = |\lambda| d(0,u) = |\lambda|\nu_d(u)$; $\nu_d(u+v) = d(0,u+v) \leq d(0,-u) + d(-u,u+v) = d(0,-u) + d(0,v) = \nu_d(u) + \nu_d(v)$.

2. Esempi di spazi con prodotto scalare o prodotto hermitiano, e norme e distanze a loro associate:

   (a) Esempi:

   - $\mathbb{R},\ (x \cdot y) = x \cdot y,\ |x| = \sqrt{x \cdot x},\ d(x,y) = |x-y|$
   - $\mathbb{R}^2,\ ((a,b)\cdot(\alpha,\beta))_{\mathbb{R}^2} = a\alpha + b\beta,$
     $|(a,b)| = \sqrt{((a,b))\cdot(a,b))} = \sqrt{a^2+b^2},$
     $d_{\mathbb{R}^2}((a,b),(\alpha,\beta)) = |(a,b)-(\alpha,\beta)|$
   - $\mathbb{C},\quad x = a+ib,\ y = \alpha + i\beta,\ (x\cdot y) = x \cdot \bar{y} = (a\alpha + b\beta) + i(-a\beta + b\alpha) =$
     $= ((a,b)\cdot(\alpha,\beta))_{\mathbb{R}^2} - i \det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},\ |x| = \sqrt{x\cdot\bar{x}},$
     $d(x,y) = |x-y| = d_{\mathbb{R}^2}((a,b),(\alpha,\beta))$
   - $\mathbb{R}^n,\ (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,\ |\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})},\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$
   - $\mathbb{C}^n,\ (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j,\ |\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})},\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$
   - $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\},\ (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n,$
     $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}},\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$
   - $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C}),\ (f\cdot g)_{L^2(a;b)} = \int_{[a;b]} f(t)\overline{g(t)}\,dt$
     $|f|_{L^2(a;b)} = \sqrt{(f\cdot f)},\ d(f,g) = |f-g| = \sqrt{\int_{[a;b]} |f(t)-g(t)|^2\,dt},$
   - $\mathcal{C}^k([a;b],\mathbb{C}),$
     $(f\cdot g)_{H^{k,2}(a;b)} = \sum_{h=0}^{k}(\frac{d^h f}{dt^h}\cdot\frac{d^h g}{dt^h})_{L^2(a;b)} = \sum_{h=0}^{k}\int_{[a;b]} \frac{d^h f}{dt^h}\frac{d^h \bar{g}}{dt^h}\,dt,$
     $|f|_{H^{k,2}(a;b)} = \sqrt{(f\cdot f)},\ d(f,g) = |f-g|$

   Per provare che gli spazi prehilbertiani definiscono in effetti spazi normati, e per provare anche che in tutti gli esempi sopra elencati le forme bilineari sono ben definite si considera un asserto astratto che si basa sulla diseguaglianza elementare $2ab \le a^2+b^2$ e generalizza il fatto che il rettangolo ha area massima tra i parellelogrammi con lunghezze dei lati assegnati.

   (b) **Diseguaglianza di Cauchy-Schwartz.** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Se $\mathcal{B} : V \times V \to \mathbb{C}$, $\mathcal{B}(u,v) = u\cdot v$, è: lineare nella prima variabile, antilineare nella seconda variabile, $u\cdot v = \overline{v\cdot u}$, $u\cdot u \ge 0$ allora si ha:

   $$\boxed{|u\cdot v| \ \le\ \sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v}.}$$

   Dim.: $\forall t \in \mathbb{R} :\ \mathcal{B}(u+tv, u+tv) \ge 0$, cioè: $v\cdot vt^2 + 2tRe(u\cdot v) + u\cdot u \ge 0$. Nel caso degenere $v\cdot v = 0$ ne segue che $Re(u\cdot v) = 0$, e considerando $u - tv$ anche che $Im(u\cdot v) = 0$. Altrimenti si ha un trinomio di secondo grado sempre positivo per cui il discriminante non è positivo cioè:

$$|Re(u \cdot v)| \ \leq \ \sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}.$$

Posto $z = u \cdot v$ si ha che $w = |z| = zz^{-1}|z|$ è reale ed ha lo stesso modulo di z. Ma $|z| = \left(z^{-1}|z|u\right) \cdot v$, e $u \cdot u = \left(z^{-1}|z|u\right) \cdot \left(z^{-1}|z|u\right)$. Per cui applicando la precedente diseguaglianza a $z^{-1}|z|u$ e v si ottiene quanto desiderato.

(c) Vale l'analoga diseguaglianza nel caso reale cioè con le seguenti ipotesi: V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} : V \times V \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(u, v) = u \cdot v$, è: separatamente lineare nella prima variabile, separatamente lineare nella seconda variabile, $u \cdot v = v \cdot u$, $u \cdot u \geq 0$.

(d) Nelle precedenti ipotesi si ha $\sqrt{(u + v) \cdot (u + v)} \leq \sqrt{u \cdot u} + \sqrt{v \cdot v}$.

Norma associata ad un prodotto scalare. In particolare se $\mathcal{B}$ è un *prodotto scalare* su V, ovvero un prodotto hermitiano nel caso complesso, cioè vale anche: $u \cdot u = 0$ solo se $u = 0_V$, si ha che:

$$\boxed{u \mapsto \sqrt{u \cdot u} \text{ è una norma su } V.}$$

Dim.: $(u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + v \cdot v + 2Re(u \cdot v) \leq u \cdot u + v \cdot v + 2\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v} = (\sqrt{u \cdot u} + \sqrt{v \cdot v})^2$.

(e) Una norma $u \mapsto |u|$ deriva da un prodotto scalare se e solo se vale l'identità del parallelogramma:

$$|x|^2 + |y|^2 = \tfrac{|x+y|^2+|x-y|^2}{2}$$

(*) Nel caso si ha che $\varphi(x, y) = \frac{|x+y|^2-|x-y|^2}{4}$ è il prodotto scalare cercato.

(f) In uno spazio prehilbertiano $(x \cdot y) = |x||y|$ se e solo se x ed y sono linearmente dipendenti. In particolare se $|x + y| = |x| + |y|$ allora x ed y sono linearmente dipendenti.

(g) - Si provi che lo spazio $\mathcal{C}([a; b])$ con la funzione $d_{L^2}(f, g) = \left(\int_{[a;b]} |f - g|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ è uno spazio metrico.

- Si provi che lo spazio delle funzioni Riemann integrabili su $[a; b]$ con la funzione $d_{L^2}(f, g) = \left(\int_{[a;b]} |f - g|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ **non** è uno spazio metrico.

(h) Sia f una funzione Riemann integrabile su $[0; 2\pi]$ allora:

- le sue componenti di Fourier $c_n = \int_0^{2\pi} f(\tau)\frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2\pi}} d\tau$ sono una successione di l^2;

3. Esempi di spazi normati e quasi-normati:

   (a) Esempi:

   - $\mathbb{R}^2,\ |(x,y)|_{l^1} := |x| + |y|,$
   - $\mathbb{R}^2,\ |(x,y)|_{l^\infty} := \max\{|x|,|y|\},$
   - $\mathbb{R}^n,\ |\mathbf{x}|_{l^\infty} := \max_{1\le i\le n} |x_i|,$
   - $\mathbb{R}^n,\ 1 \le p < \infty\ |\mathbf{x}|_{l^p} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$
   - $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) := \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ :\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| <\ +\infty\ \}$

     $|\mathbf{x}|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$
   - $1 \le p < +\infty,\ l^p(\mathbb{N},\mathbb{R}) := \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\ <\ +\infty\ \},$

     $|\mathbf{x}|_{l^p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$
   - Funzioni limitate su $A \subseteq \mathbb{R}$, $|f|_{sup} = \sup_{x\in A} |f(x)|,$
   - $1 \le p < +\infty$, Funzioni integrabili insenso generalizzato su A con potenza p sommabile

     $|f|_{L^p} = \left(\int_{[a;b]} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$
   - $\mathcal{C}^k([a;b]),\ 1 \le p < +\infty,\ |f|_{H^{k,p}} = \left(\sum_{h=0}^{k} |f^{(h)}|^p_{L^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$
   - $\mathcal{C}^k([a;b]),\ |f|_{H^{k,\infty}} = \max_{0\le h\le k} |f^{(h)}|_{L^\infty}$

   (b) Si disegnino nel piano gli insiemi $\{(x,y) :\ |(x,y)|_{l^p} \le 1\ \}$.

   (c) Provare che per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha: $|\mathbf{x}|_{l^\infty} \le |\mathbf{x}|_{l^p} \le n^{\frac{1}{p}} |\mathbf{x}|_{l^\infty}$.

   (d) - Provare che per le funzioni Riemann integrabili su $[a;b]$ si ha: $|f|_{L^p} \le (b-a)^{\frac{1}{p}} |f|_{sup}$.
   - Provare che dato $[a;b]$ non esiste alcun numero $C > 0$ per cui $|f|_{sup} \le C|f|_{L^p}$.

   Al fine di dimostrare che quelle definite sono in effetti delle norme (tranne che nel caso delle funzioni con potenza sommabile che possono annullare gli integrali senza essere nulle) è utile ricordare alcune importanti diseguaglianze:

   (e) **Diseguaglianza di Young.** Se $\psi : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$, ψ strettamente crescente, $\psi(0) = 0$, si ha:

   $$ab\ \le\ \int_{[0;a]} \psi(x)dx\ +\ \int_{[0;b]} \psi^{-1}(y)dy.$$

   In particolare se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha $ab\ \le\ \dfrac{a^p}{p}\ +\ \dfrac{b^q}{q}$

(f) **Diseguaglianza di Hölder.** Si hanno le seguenti diseguaglianze quando o $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o $p = 1$ e $q = \infty$:

$$\boxed{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} |x_n||y_n| \;\leq\; |\mathbf{x}|_{l^p}|\mathbf{y}|_{l^q}\ , \quad |fg|_{L^1} \;\leq\; |f|_{L^p}|g|_{L^q}.}$$

Dim. Si prova per le funzioni essendo il caso delle successioni del tutto analogo. Se una tra $|\mathbf{f}|_{L^p}$ e $|\mathbf{g}|_{L^q}$ è nulla, per definizione di integrale generalizzato di una funzione non negativa e per definizione di integrale di Riemann, si ottiene che il primo membro é anch'esso nullo. Se entrambi i numeri sono diversi da zero si ottiene grazie alla diseguaglianza di Young:

$$\frac{|f(x)|}{|f|_{L^p}}\frac{|g(x)|}{|g|_{L^q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p|f|_{L^p}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q|g|_{L^q}^q}.$$

Integrando si conclude.

(g) **Diseguaglianza triangolare.** Si ha per $1 \leq p \leq \infty$:

$$\boxed{|\mathbf{x}+\mathbf{y}|_{l^p} \;\leq\; |\mathbf{x}|_{l^p} \;+\; |\mathbf{y}|_{l^p}\ , \quad |f+g|_{L^p} \;\leq\; |f|_{L^p} \;+\; |g|_{L^p}.}$$

Dim. Il caso $p = \infty$ si ottiene dalla diseguaglianza triangolare tra numeri e quindi passando all'estremo superiore. Per $p < \infty$:

$$\int |f+g|^p \;\leq\; \int |f||f+g|^{p-1} \;+\; \int |g||f+g|^{p-1} \quad [\text{Hölder } q = \frac{p}{p-1}\ ]$$
$$\leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \;+\; \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Nota: Grazie a tale diseguaglianza si ha che le funzioni assolutamente integrabili in senso generalizzato su A con potenza p sommabile sono uno spazio vettoriale, pur non essendo $f \mapsto |f|_{L^p}$ su questo spazio una norma.

Si osservi che $f \mapsto \sup |f|$è una norma sullo spazio delle funzioni limitate.

(h) Le norme L^p ed l^p, con $p \neq 2$, non provengono da un prodotto scalare, a parte il caso delle norme l^p su $\mathbb{R}$.

4. Spazi metrici.

GLOSSARIO	DEFINIZIONE	NOTAZIONE
FUNZIONE CONTINUA in un PUNTO $x{\in}M$ a valori in N	$f{:}(M{,}d){\to}(N{,}\delta),\ x{\in}M$ $\forall\ V{\in}\mathcal{I}_{f(x)}\ \exists\ \ U{\in}\mathcal{I}_x$ $\forall y{\in}U\ \Rightarrow\ f(y){\in}V$	
FUNZIONE CONTINUA da $(M{,}d)$ in $(N{,}\delta)$ (continua in ogni $x{\in}M$)	$f{:}(M{,}d){\to}(N{,}\delta)$ $\forall\rho{>}0\ \ \forall\mathbf{x}{\in}\mathbf{M}\ \exists\mathbf{r}\ \ \forall y{\in}M$ $d(x{,}y){\le}r\ \Rightarrow\ \delta(f(x){,}f(y)){\le}\rho$	$f{\in}\mathcal{C}(M{,}N)$
FUNZIONE CONTINUA UNIFORMEMENTE su $E{\subseteq}M$ in $(N{,}\delta)$	$f{:}(M{,}d){\to}(N{,}\delta),\ E{\subseteq}M$ $\forall\rho{>}0\ \ \exists\ \mathbf{r}{>}\mathbf{0}\ \ \forall\mathbf{x}{\in}\mathbf{E}\ \ \forall y{\in}E$ $d(x{,}y){\le}r\ \Rightarrow\ \delta(f(x){,}f(y)){\le}\rho$	
SEQUENZIALMENTE CONTINUA in un punto $x{\in}M$ a valori in N	$f{:}(M{,}d){\to}(N{,}\delta),\ x{\in}M$ $\forall x_n\underset{d}{\to}x\ \Rightarrow\ f(x_n)\underset{\delta}{\to}f(x)$	
LIMITE DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO NON ISOLATO	$x{\in}M,\ \forall U{\in}\mathcal{I}_x\ U{\neq}\{x\},\ l{\in}N$ $\forall\ V{\in}\mathcal{I}_l\ \exists\ \ U{\in}\mathcal{I}_x$ $\forall y{\in}U\setminus\{x\}\ \Rightarrow\ f(y){\in}V$	$f(y)\underset{\delta}{\to}l,\ \ y\underset{d}{\to}x$ $\lim_{y\to x}f(y){=}l$
FUNZIONI HÖ LDERIANE di esponente $\alpha{\in}]0;1[$	$f{:}(M{,}d){\to}(N{,}\delta),\ \alpha{\in}]0;1[$ $\exists H{>}0\ \ \forall\ x,\ y{\in}M$ $\delta(f(x){,}f(y))\ \le\ H(d(x{,}y))^\alpha$	
FUNZIONI LIPSCHTZIANE di costante L (L-lipschitziane)	$f{:}(M{,}d){\to}(N{,}\delta),$ $\forall\ x,\ y{\in}M$ $\delta(f(x){,}f(y))\ \le\ Ld(x{,}y)$	
CONTRAZIONI di uno spazio metrico in se	$f{:}(M{,}d){\to}(M{,}d),\ \lambda{\in}[0;1[$ f λ-lipschitziana	
IMMERSIONI ISOMETRICHE	$f{:}(M{,}d){\to}(N{,}\delta),$ $\forall\ x,\ y{\in}M$ $\delta(f(x){,}f(y))\ =\ d(x{,}y)$	
ISOMETRIE	$f{:}(M{,}d){\to}(N{,}\delta),$ immersione isometrica surgettiva	

una funzione é continua in un punto x non isolato se e solo se $\lim_{y\to x}f(y){=}f(x)$
una funzione definita su uno spazio metrico é continua se e solo se é continua per successioni
una funzione é continua tra due spazi metrici se e solo se la controimmagine di un aperto nel codominio é un aperto nel dominio
una funzione é continua tra due spazi metrici se e solo se la controimmagine di un chiuso nel codominio é un chiuso nel dominio
una funzione continua su un compatto é uniformemente continua
una funzione uniformemente continua in un sottoinsieme é estendibile con continuitá alla chiusura di questo
le isometrie di uno spazio di Hilbert in se che tengono fissa l'origine sono lineari

(a) - Se (M,d) é uno spazio metrico ed $E \subseteq M$ allora $(E, d_{|_{E\times E}})$ é uno spazio metrico.

(b) - Se (M,d) ed (N,δ) sono spazi metrici allora

$$\mathcal{B}(M,N) := \{\ f : M \to N\ :\ f(M) \text{ é limitato in } \ (N,\delta)\}\ ,$$
$$d_{\mathcal{B}}(f,g) = \sup_{x\in M} \delta(f(x), g(x))$$

é uno spazio metrico.

- L'insieme delle funzioni continue e limitate, $\mathcal{CB}(M,N) = \mathcal{C}(M,N) \cap \mathcal{B}(M,N)$ é chiuso in $(\mathcal{B}(M,N), d_{\mathcal{B}})$.

- Se V é uno spazio vettoriale ed E un insieme anche $\mathcal{B}(E,V)$ lo é, con le operazioni definite puntualmente.

- Se (V,ν) é uno spazio vettoriale normato e (M,d) uno spazio metrico allora anche $\mathcal{C}(M,V)$, $\mathcal{CB}(M,V)$ sono spazi vettoriali, ed inoltre $f \mapsto d_{\mathcal{B}}(f,\mathbf{0})$ é una norma su $\mathcal{B}(M,V)$, ove con $\mathbf{0}$ si é indicata la funzione identicamente nulla $x \mapsto 0_V$.

(c) - Ogni spazio metrico (M,d) é immergibile **isometricamente** in uno spazio di normato: fissato $x_0 \in M$ si pone:

$$\Psi : M \to \mathcal{CB}(M,\mathbb{R})\ ,\quad \Psi(x) :\ y\ \mapsto d(x,y) - d(x_0,y)$$

(d) - Uno spazio metrico si dice *separabile* se é chiusura di un suo sottoinsieme numerabile. In altri termini vi é una successione $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to M$ per cui ogni punto di M é limite di una sottosuccessione di $\mathbf{x}$.

- Gli spazi $\mathbb{R}^n$ sono separabili. Se $1 \le p < +\infty$ allora $l^p(\mathbb{N})$ é separabile. Invece $l^\infty(\mathbb{N})$ non é separabile.

- Ogni spazio metrico separabile é immergibile **isometricamente** nello spazio $l^\infty(\mathbb{N})$.

(e) - Distanze geodetiche. Se si considera il "bordo del quadrato di lato 2" $Q = \{(x,y)\ :\ \max\{|x|,|y|\} = 1\ \}$ si puó considerare su di esso la distanza indotta da quella di $\mathbb{R}^2$ (in modo la distanza del punto $(1,1)$ dal punto $(0,-1)$ sia $\sqrt{5}$). Un'altra distanza piuttosto naturale é quella di considerare come distanza tra due punti di questo insieme la minima lunghezza dei cammini continui che **congiungono i due punti** e **sono interamente contenuti in** Q (in questo caso la distanza del punto $(1,1)$ dal punto $(0,-1)$ é 3). Questa osservazione ha carattere molto generale.

(f) Completezza.

i. - In uno spazio metrico (M, d) l'immagine di una successione di Cauchy é un sottoinsieme totalmente limitato. In particolare é un sottoinsieme limitato.

Dim.: Sia $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to M$ una successione di Cauchy:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \ \forall n, \ m \ \geq n_\varepsilon \ \ d(x_n, x_m) \ \leq \ \varepsilon$
Si tratta di dimostrare che: $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N_\varepsilon \ \exists \ y_1 \dots y_N \in M$:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq N} \ d(x_n, y_i) \leq \ \varepsilon$

ovvero:

$\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ \subseteq \ B(y_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(y_N, \varepsilon)$

Quindi dato il raggio ε si considera $N_\varepsilon = n_\varepsilon$ dato dalla condizione di Cauchy sulla successione. Quindi si scelgono i centri $y_i = x_i$, $1 \leq i \leq N$. Chiaramente gli elementi dell'immagine della successione $x_1 \dots x_N$ appartengono all'unione del numero finito di palle scelte di raggio ε (ne sono i centri). Se poi si considerano gli elementi x_n con $n > N$ per la scelta di $N = n_\varepsilon$ si ha $d(x_n, y_N) \ \leq \ \varepsilon$, cioé $x_n \in B(y_N, \varepsilon)$.

ii. - In $\mathbb{R}^M$ una successione $\{(x_n^1, \dots x_n^M)\}_{n\in\mathbb{N}}$é di Cauchy se e solo se sono di Cauchy le M successioni di numeri reali delle componenti: $\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \{x_n^M\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Analogamente in $\mathbb{R}^M$ una successione é convergente se e solo se lo sono le M successioni di numeri reali delle componenti.

- Lo spazio $\mathbb{R}$ é completo. Quindi gli spazi $(\mathbb{R}^M, d_{l^p})$ sono anch'essi completi. Grazie alla diseguaglianza $|\mathbf{x}|_{l^\infty} \leq |\mathbf{x}|_{l^p} \leq M^{\frac{1}{p}} |\mathbf{x}|_{l^\infty}$ basta provarlo per $p = 2$.

iii. - Se (N, δ) é completo allora $(\mathcal{B}(M, N), d_\mathcal{B})$ é completo.

- Se (N, δ) é completo allora $(\mathcal{CB}(M, N), d_\mathcal{B})$ é completo.

- Gli spazi $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$ sono spazi metrci completi, ovvero sono spazi di Banach con le relative norme.

Dim.: Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di successioni di l^p:

$$\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots x_n^k \dots).$$

i) Se $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é di Cauchy in l^p si ha che ogni successione di numeri reali data dalle componenti, $\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, é di Cauchy. Anzi sono di Cauchy uniformemente al variare di $k \in \mathbb{N}$. Infatti:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n^k - x_m^k| \ \leq \ |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|_{l^p}.$$

Quindi essendo $\mathbb{R}$ completo si ha:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists x^k \in \mathbb{R} \quad : \quad x_n^k \to_{n\to\infty} x^k.$$

ii) Si tratta di provare che $\mathbf{x} := (x^1, \dots x^k \dots)$ é una successione di l^p e inoltre che $\ \mathbf{x}_n \to_{n\to\infty} \mathbf{x}$ in norma l^p, e non solo puntualmente. Si esemina il caso $1 \leq p < \infty$ per comoditd́i scrittura, essendo il caso $p = \infty$ analogo epiú semplice

iii) Essendo $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy si ha:

$\forall\varepsilon\ \exists\ N = N_\varepsilon\ \ :\qquad\qquad \forall\ m,n \geq N\ \ \sum_{k=0}^{\infty} |x_m^k - x_n^k|^p\ \leq\ \varepsilon^p$

in particolare

$$\forall M\ \forall\ m,n \geq N\ \ \sum_{k=0}^{M} |x_m^k - x_n^k|^p\ \leq\ \varepsilon^p$$

fissato M per $n \to \infty$ si ha

$$\forall\ M\ \ \forall\ m \geq N\ \ \sum_{k=0}^{M} |x_m^k - x^k|^p\ \leq\ \varepsilon^p$$

In conclusione si é ottenuto

$$\forall\varepsilon\ \ \exists N = N_\varepsilon\quad \forall\ M\quad \forall\ m \geq N\quad \sum_{k=0}^{M} |x_m^k - x^k|^p\ \leq\ \varepsilon^p$$

Passando all'estremo superiore su M si ha quindi:

$$\forall\varepsilon\ \ \exists N = N_\varepsilon\quad \forall\ m \geq N\quad |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}|_{l^p}^p\ \leq\ \varepsilon^p$$

Cioé $|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}|_{l^p} \to 0,\ m \to \infty$. In particolare per $m \geq N_1$ si ha che $\mathbf{x}_m - \mathbf{x} \in l^p$, ed essendo anche $\mathbf{x}_m \in l^p$ dalla diseguaglianza triangolare si ha che $\mathbf{x} \in l^p$.

- (Esercizio) Il prodotto $(M \times N, ((x,y),(a,b)) \mapsto d(x,a) + \delta(y,b))$ di due spazi metrici completi é completo.
- (Esercizio:) In uno spazio metrico (M,d) ogni successione di Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ per cui $\sum d(y_k, y_{k+1}) < +\infty$.
- In uno spazio metrico (M,d) ogni successione di Cauchy che abbia una sottosuccessione convergente, converge essa stessa al limite individuato dalla sottosuccessione.

(g) Connessione (cenni).

Vi sono due idee intuitive di base al concetto di essere *connesso*: poter congiungere due arbitrari punti (con un cammino continuo), e essere fatto di un unico pezzo (non sono definite funzioni continue con solo due valori).

Definizione di connesso: Uno spazio metrico (M, d) si dice *connesso* se gli unici sottoinsiemi di M che sono *sia aperti* in (M, d) *che chiusi* in (M, d) sono solamente $\emptyset$ ed M stesso.

Definizione di connesso per archi: Uno spazio metrico (M, d) si dice *connesso per archi* continui se per ogni paio di punti vi é un cammino che sia:
i- *a valori* in M;
ii- *continuo* in (M, d);
iii- che *congiunge* i due dati punti.
In altri termini $\forall x, y \in M\ \exists \gamma \in \mathcal{C}([0;1], (M, d)) :\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$.

- Chiaramente la connessione per archi puó essere specializzata (o indebolita), richiedendo che i cammini congiungenti verifichino altree proprietá. Un esempio tipico é quello degli spazi metrici per cui é possibile definire la distanza geodetica.
- Un altro esempio é quello della *connessione con un numero finito di "poligonali*, che non richiede la struttura di spazio metrico ma semplicemente quella di essere sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale: $y = x + \sum_1^N v_i$.

i. - I sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ con la metrica indotta che risultano connessi sono tutti e soli gli intervalli, le semirette, $\emptyset$, ed $\mathbb{R}$ stesso.

   - Se uno spazio é connesso per archi allora é connesso.

   - Il seguente esempio mostra che vi sono spazi connessi non connessi per archi: si considera il grafico della funzione $x \mapsto \sin \frac{1}{x},\ x > 0$ unito al punto $(0, 0)$ con la distanza indotta da quella euclidea in $\mathbb{R}^2$:
   $M = \{(x, \sin \frac{1}{x}) :\ x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

   - Gli aperti di spazi di normati, con la distanza indotta dalla norma, sono connessi se e solo se sono connessi per archi.

   - (Esercizio:) i) Si provi che un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ che sia connesso per archi continui lo è anche per poligonali.
   ii) L'unione di due sottoinsiemi di uno spazio metrico connessi per la metrica indotta, non disgiunti é connessa per la metrica indotta. Sostituendo e nell'ipotesi e nella tesi alla connessione la connessione per archi l'asserto é ancora vero?
   iii) Se (M, d) e (N, δ) sono spazi connessi allora
   $(M \times N, ((x, y), (a, b)) \mapsto d(x, a) + \delta(y, b))$
   é uno spazio metrico connesso.
   iv) La chiusura in uno spazio metrico di un sottoinsieme connesso per la distanza indotta é un sottoinsieme connesso.

ii. - Sia $f \in \mathcal{C}((M, d), (N, \delta))$ allora l'immagine di un sottoinsieme di M connesso [connesso per archi] per la distanza indotta da d é un sottoinsieme di N connesso [connesso per archi] per la distanza indotta da δ. (Questa proprietá estende il teorema del valore intermedio per funzioni reali di una variabile reale).

- Sia $f \in \mathcal{C}((M,d),(N,\delta))$, (M,d) connesso. Se f é localmente costante ($\forall x \in M\ \exists r\ f(B(x,r)) = \{f(x)\}$) allora f é costante.

Definizione: Dato uno spazio metrico (M,d) si dice che $C \subseteq M$ é una *componente connessa* di (M,d) se:
- C é non vuoto;
- C é connesso per la distanza indotta;
- C non é sottoinsieme di alcun sottoinsieme connesso per (M,d) diverso da
C stesso.

Definizione: Uno spazio metrico si dice *totalmente sconnesso* se gli unici sottoinsiemi non vuoti connessi per la distanza indotta sono quelli con un solo elemento. Equivalentemente le uniche componenti connesse sono i punti stessi dello spazio.

(c) - Se A e B sono due diverse componenti connesse di (M,d) allora sono sottoinsiemi disgiunti. Le componenti connesse di uno spazio metrico inducono una partizione in sottoinsiemi connessi.
- Se $x \in M$ vi é un'unica componente connessa di (M,d) a cui x appartiene.

-(Esercizio:) Le componenti connesse di uno spazio metrico sono sottoinsiemi chiusi. Sono aperti?

(d) - I numeri razionali con la distanza usuale sono uno spazio totalmente sconnesso.
- (Esercizio:) Ogni spazio metrico numerabile é totalmente sconnesso.
- L'insieme di Cantor é totalmente sconnesso e completo per la distanza indotta da quella usuale di $\mathbb{R}$. Esso é il punto fisso della trasformazione:

$$T : (\text{chiusi di } [0;1]) \to (\text{chiusi di } [0;1]) \ : \ T(C) = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right)$$

e consiste solo dei punti di $[0;1]$ che hanno l' espressione in base 3 non definitivamente nulla senza la cifra 1.

5. Compattezza (cenni).

• Al fine di ottenere teoremi generali di esistenza per problemi di minimo nel contesto astratto degli spazi metrici, una delle nozioni piú importanti, che estende una proprietá elementare degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, é quella della *sequenziale compattezza*.

• Se $I \subset \mathbb{R}$ é un intervallo **chiuso** e **limitato** allora da ogni successione a valori in I si puó estrarre una **sottosuccessione convergente** e il suo limite **appartiene ad** I.

• $C \subseteq \mathbb{R}$: $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C\ \exists l \in C\ \&\ \exists \{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to l \iff C$ **chiuso** e **limitato**
.

Dim.: $\Rightarrow$) Se C non fosse limitato vi sarebbe una successione di suoi elementi con (norma) divergente. Ogni sottosuccessione di questa divergerebbe (in norma), quindi non potrebbe essere limitata e tanto meno convergere. Se C non fosse chiuso vi sarebbe, per definizione, una successione di suoi elementi convergente ad un elemento del complementare. Per unicitá del limite ogni sua sottosuccessione non potrebbe convergere ad un elemento di C.

$\Leftarrow$) Poiché C é limitato é contenuto in un intervallo limitato e chiuso. Per la proposizione precedente vi é una sottosuccessione convergente in tale intervallo. Essendo C chiuso tale limite sta in C.

• Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ **chiuso** e **limitato**, ed $f : C \to \mathbb{R}$ **continua**

$$\Downarrow$$

f **assume in** C valore **massimo** e valore **minimo**.

Dim.: - Per definizione di estermo inferiore e di estremo superiore vi sono $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ per cui:

$$f(x_n) \to \inf_C f,\ f(y_n) \to \sup_C f,\ n \to \infty.$$

- D'altronde per il punto precedente, essendo C **chiuso** e **limitato** si ha:

$$\exists x_{k_n} \to x \in C,\ \exists y_{h_n} \to y \in C,\ n \to \infty.$$

- Essendo f **continua su** C, essendo le sottosuccessioni a valori in C come i loro limiti, si ha: $f(x_{k_n}) \to f(x),\ f(y_{h_n}) \to f(y),\ n \to \infty.$

- Per unicitá del limite $f(x) = \inf_C f$, $x \in C$, e $f(y) = \sup_C f$, $y \in C$.

• $C \subseteq \mathbb{R}^N$: $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C\ \exists l \in C\ \&\ \exists \{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to l \iff C$ **chiuso** e **limitato**.

Dim.: $\Rightarrow$) Come per il caso $N = 1$.

$\Leftarrow$)Per induzione sulla dimensione N. Per $N = 1$ é stato provato nei precedenti punti. Sia C sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^{N+1} \sim \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $x \sim (y, t)$.

- Poiché $|t|$, $|y|_{\mathbb{R}^N}$ sono minori di $|(y, t)|_{\mathbb{R}^{N+1}}$ dalla limitatezza di C in $\mathbb{R}^{N+1}$ segue che se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$, $x_n = (y_n, t_n)$, le due successioni $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ sono limitate. Per ipotesi induttiva vi é una sottosuccessione $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, e per quando provato per $N = 1$ vi é una sottosuccessione $\{t_{k_{h_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Quindi $\{x_{k_{h_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, poiché $|(y, t)|_{\mathbb{R}^{N+1}} \leq |t| + |y|_{\mathbb{R}^N}$.

- Essendo C chiuso e la successione a valori in C il limite é elemento di C.

• Sia $C \subseteq \mathbb{R}^N$ **chiuso** e **limitato**, ed $f : C \to \mathbb{R}$ **continua**

$$\Downarrow$$

f **assume in** C valore **massimo** e valore **minimo**.

Dim.: Come nel caso $N = 1$.

(a) **Definizione:** Uno spazio metrico si dice *compatto per successioni* se da ogni successione a valori in esso si puó estrarre una sottosuccessione **convergente** ad un elemento dello spazio **stesso.**

- Sia (M,d) uno spazio metrico e $C \subseteq M$.

C sequenzialmente compatto per la distanza indotta $\Longrightarrow$ C chiuso e limitato.

- Si consideri la palla unitaria chiusa di centro l'origine in l^2. é un chiuso ed é ovviamente un limitato. D'altronde la successione (di successioni): $x_1 = (1,0\ldots), x_2 = (0,1,0\ldots), \ldots, x_n(h) = \delta_{nh}$, non puó avere alcuna sottosuccessione convergente.

Infatti se $n \neq m$ si ha $|x_n - x_m|_{l^2} = \sqrt{2}$. Quindi nessuna sottosuccessione puøessere di Cauchy. tantomeno convergente.

- Sia (M,d) uno spazio metrico sequenzialmente compatto.

C é chiuso in (M,d) se e solo se é sequenzialemte compatto per la distanza indotta.

(b) **Definizione:** Una funzione $f : (M,d) \to \mathbb{R}$ si dice *semicontinua inferiormente [superiormente]* per successioni in un punto x di M se:
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to_d x \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$ $[\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x)]$
Se una funzione é semicontinua inferiormente [superiormente] in ogni punto si dirá semicontinua inferiormente [superiormente] in (M,d).

- Sia (M,d) é sequenzialmente compatto, e $f : M \to \mathbb{R}$ é s.s.c.i [s.s.c.s.]

$$\Downarrow$$

f assume in M valore minimo [massimo].

Dim.: Come nel caso $(M,d) = (\mathbb{R}, |x|)$ ed f continua, con la variante che nell'ultimo passaggio si ha:

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \inf_M f.$$

-(Esercizio:) i) Una funzione reale definita su uno spazio metrico é semicontinua inferiormente se e solo se il suo *sopragrafico* é chiuso nello spazio prodotto.

ii) Una funzione reale definita su uno spazio metrico é semicontinua inferiormente se e solo se per ogni $c \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{x \in M : f(x) \leq c\}$ é chiuso in (M,d).

iii) Estremo superiore di una famiglia di funzioni semicontinue inf., somma di funzioni semicontinue inf., prodotto per una costante positiva di una funzione semicontinua inf. sono semicontinue inf..

iv) Sia (M,d) seq. comp.. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é tale che $\forall g \in \mathcal{C}((M,d),\mathbb{R})$ $\exists \min_M(f+g)$ allora f é s.s.c.i. in (M,d)?

(c) - Uno spazio metrico é **completo** e **totalmente limitato** se e solo se é sequenzialmente compatto.

Dim.: $\Rightarrow$) Sia (M,d) nelle ipotesi asssunte. Si consideri $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$.

- Per l'ipotesi di totale limitatetzza per ogni $m \in \mathbb{N}$ si consideri $\mathcal{R}_m$ un ricoprimento finito di M con palle chiuse di raggio $\frac{1}{m}$. Per ogni m, essendo le palle di raggio $\frac{1}{m}$ in numero finito se ne trova una in cui la successione passa infinite volte. Si scelgono B_m, $m \in \mathbb{N}$ tra tali palle in modo che: per ogni $m \in \mathbb{N}$ nell'intersezione $B_1 \cap \ldots \cap B_m$ la successione passi infinite volte. Ció épossibile (induttivamente) poiché se le unione delle palle di $\mathcal{R}_{m+1}$ ricopre tutto M ricopre anche l'intersezione $B_1 \cap \ldots \cap B_m$ delle palle scelte in precedenza. Si sceglie arbitrariamente una sottosuccessione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tra quelle per cui $x_{k_n} \in B_1 \cap \ldots \cap B_n$.

Essendo i raggi delle palle B_m infinitesimi e la famiglia $B_1 \cap \ldots \cap B_m$ decrescente si ha che tali sottosuccessioni sono di Cauchy.

- Usando l'ipotesi di completezza si conclude.

$\Leftarrow$) Immediato.

- Le seguenti condizioni sono equivalenti per uno spazio metrico (M, d):

i) ogni arbitraria collezione di sottoinsiemi **aperti** per (M, d) la cui unione é **tutto** M ha una sottofamiglia **finita** la cui unione é ancora M:

$A_i = \mathring{A}_i,\ i \in I,\ \bigcup_{i \in I} A_i = M \Longrightarrow \exists i_1, \ldots i_N \in I := A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_N} = M.$

ii) ogni arbitraria collezione di sottoinsiemi **chiusi** le cui sottofamiglie finite hanno intersezione non vuota ha intersezione non vuota:

[**P**ropietá **I**ntersezione **F**inita $\Longrightarrow$ **I**ntersezione non vuota]

iii) (M, d) é sequenzialmente compatto.

(d) - Una funzione **continua** tra due spazi metrici **trasforma** sottoinsiemi **compatti** (per la distanza indotta nel dominio) **in** sottoinsiemi **compatti** (per la distanza indotta nel codominio).

- In particolare l'immagine di uno spazio metrico compatto mediante una funzione continua é un sottoinsieme compatto (per la distanza indotta nel codominio).

- Una funzione continua da uno spazio metrico compatto ad uno spazio metrico che sia anche bigettiva trasforma insiemi aperti in insiemi aperti. Equivalentemente la sua **inversa é continua**.

- (Esercizio) i) É vero che una funzione continua tra due spazi metrici trasforma sottoinsiemi totalmente limitati in sottoinsiemi totalmente limitati?

ii) É vero che se (M, d) é uno spazio metrico completo, e vi é una funzione continua e surgettiva da (M, d) su uno spazio metrico (N, δ) allora anche (N, δ) é completo?

(e) - **Definizione:** Una funzione $f : (M, d) \to (N, \delta)$ si dice *uniformemente continua* se:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x,\ y \in M\ d(x, y) \leq \eta \implies \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$

$$\text{In altre parole: } \sup_{\substack{x,y \in M \\ d(x,y) \leq r}} \delta(f(x), f(y)) \to 0\ ,\quad r \to 0^+.$$

- (Esercizio) i) Una funzione é uniformemente continua se e solo se $d(x_n, y_n) \to 0 \ \Rightarrow\ \delta(f(x_n), f(y_n)) \to 0.$

ii) Se una funzione é uniformemente continua allora trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy. É vero il viceversa?

iii) Siano (M, d), (N, δ) spazi metrici completi, e sia $A \subset M$. Se $f : (A, d_{|A \times A}) \to (N, \delta)$ é uniformemente continua allora vi é un'unica estensione continua di f da $(\overline{A}, d_{|\overline{A} \times \overline{A}})$ a (N, δ). Equivalentemente una funzione uniformemente continua tra due spazi metrici ha un'unica estensione continua dal completamento del dominio a valori nel completamento del codominio. Tale estensione risulta anche uniformemente continua.

- Una funzione **continua** su uno spazio **totalmente limitato** é anche **uniformemente continua**.