

Guasoni, Modica, Tortorelli

II foglio di esercizi
dal 22 ottobre al 26 ottobre 2001

Nota: alcuni dei seguenti esercizi sono tratti da "A problem book in Mathematical Analysis" di G.N.Berman, M.I.R. 1977. Altri testi da cui attingere esercizi sono per esempio: A.Faedo, L.Modica, C.R.Grisanti: Analisi I Esercizi; J.P.Cecconi, L.C.Piccinini, G.Stampacchia: Esercizi e problemi di Analisi matematica; F.Conti: Calcolo; F.Conti, P.Acquistapace, A.Savojni: Analisi Matematica; R.Courant, F.John: Calculus and Analysis voll. 1-2; M.Giaquinta, G.Modica Analisi Matematica voll.1-2-3 etc. etc. .

ESERCIZIO n. 1 Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}u' + 2u &= 4x, \quad u' + u = \cos x, \quad u' + au = e^{mx}, \quad u' - u \sin x = \sin 2x, \quad u' + 2xu = xe^{-x^2}, \\u' + \frac{1-2x}{x^2}u &= 1 \quad (x > 0), \quad u' - u = \frac{(1+x^2)e^x}{x} \quad (x < 0), \quad u' - \frac{2xu}{1+x^2} = 1 + x^2, \\u' + \frac{2}{x}u &= \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0), \quad u' + \frac{nu}{x+1} = e^x(x+1)^n \quad (n \in \mathbf{N}), \\xu' &= 1, \quad xu' + 2u = \sin x, \quad x(u' - u) = (1+x^2)e^x, \quad (x+1)u' - nu = e^x(x+1)^{n+1}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO n. 2 L'equazione differenziale $u' = f(x, u)$ si può interpretare formalmente:

$$du - f(x, u)dx = 0.$$

La funzione inversa dovrebbe verificare l'equazione $x' = \frac{1}{f(x, u)}$. Tracciare i grafici approssimativi delle soluzioni dei seguenti problemi riducendosi ad equazioni lineari:

$$u' = \frac{1}{2x - u}, \quad u(1) = 1; \quad u' = \frac{1}{2x - u^2}, \quad u(1) = -1; \quad u' = \frac{1}{x + e^u}, \quad u(0) = 3;$$

ESERCIZIO n. 3

- Un massa puntiforme di grandezza m , in quiete all'istante iniziale t_0 , si muove di moto rettilineo soggetta ad una forza proporzionale, per un fattore κ , all'incremento di tempo dall'istante iniziale, ed ad una forza di resistenza del mezzo proporzionale, per un fattore χ , alla velocità. Si espliciti la velocità in funzione del tempo e dei parametri.
- Un corpo ad un istante t_0 ha temperatura pari a quella dell'ambiente circostante eguale a Θ_0 . Il corpo viene riscaldato a tasso costante, pari a δ^2 , e disperde calore nell'ambiente in modo proporzionale, per un fattore γ^2 , alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente considerata costante. Si espliciti la dipendenza dal tempo della temperatura del corpo.

ESERCIZIO n. 4 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$u' = \frac{1-2x}{y^2}, \quad xu' + u = u^2 \quad (x > 0), \quad u' + \sqrt{\frac{1-u^2}{1-x^2}} = 0, \quad u' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad u' = 100^{x+u}.$$

ESERCIZIO n. 5 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali per sostituzione:

$$u' = 3 + \cos(x-u), \quad u' = \frac{u+x-1}{(x+u)^2+1}, \quad u' = \frac{6x+\frac{u}{x}}{2-\log x}, \quad u' = -\frac{e^x \cos u + 3u}{3x - e^x \sin u}.$$

ESERCIZIO n. 6 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali "omogenee":

$$u' = \frac{ux}{x^2+2u^2}, \quad u' = e^{\frac{u}{x}} + \frac{u}{x}, \quad xu' = u(\log u - \log x), \quad (3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy, \\ u' = \frac{(1+u)^2}{xu+x-x^2}.$$

ESERCIZIO n. 7 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali di Bernoulli:

$$u' = 1 + 3u + u^2, \quad u' = xu + \sqrt{u} \cos x, \quad u' = u \tan x - u^2 \cos x, \quad u' = u - u^2 \cos x, \\ u^{n-1}(\alpha \cdot u' + u) = x \quad (n \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{R}).$$

ESERCIZIO n. 8 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali riducendosi ad un'equazione omogenea o lineare per sostituzione e cambiamento di variabili:

$$u' = 2 \frac{(u+2)^2}{(x+u-1)^2}, \quad u' = \frac{2u-x-5}{2x-u+4}, \quad u' = \frac{x+u-2}{u-x-4}, \quad u' = \frac{u^2-x}{2u(x+1)}, \\ u' = \frac{u^3}{2(xu^2-x^2)}.$$

(*) ESERCIZIO n.9 Trovare almeno un grafico per cui la distanza dall'origine di ogni retta tangente ad un suo punto è uguale alla distanza dall'origine della retta normale nello stesso punto.

ESERCIZIO n. 10 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:

$$u'' = x + \sin x, \quad u'' = \arctan x, \quad u'' = u' + x, \quad u'' = \frac{u'}{x} + x, \quad (u'')^2 = u', \quad 2xu'u'' = (u')^2 + 1, \\ u'' = u, \quad u'' = u^{13}, \quad u'' = 2uu', \quad u''u + (u')^2 = x, \quad u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = 0, \quad u'' + u', \quad u'' = \frac{u'(e^u-1)}{x}, \\ u'' = \frac{u}{1+(u')^2}.$$

ESERCIZIO n. 11 Si trovino le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

$$u'' = \frac{2xu'}{1+x^2}, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 3; \quad u'' = \frac{u'}{x} + \frac{x}{u'}, \quad u(1) = 1, \quad u'(1) = 1; \\ u'' = xu' + u + 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

ESERCIZIO n.12 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti o la soluzione dei problemi ai dati iniziali:

$$u'' - 2u' + u = 0, u(1) = 0, u'(1) = e; \quad u'' - 3u' + 2u = 0, u(0) = 1, u'(0) = 0; \quad (\text{Faedo-Modica})$$

$$u'' + u' - 2u = 0; \quad 4u'' - 20u' + 25u = 0; \quad u'' - 4u' + 3u = 0, u(0) = 6, u'(0) = 10. \quad (\text{Berman})$$

ESERCIZIO n.13 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti o la soluzione dei problemi con dati iniziali o al bordo:

$$u'' - 3u' + 2u = x^2; \quad u'' + 2u' + 10u = x^3 - 1; \quad 2u'' + u' - u = 2e^x; \quad u'' + 2u' + 5u = \sin x;$$

$u'' - 3u' + 2u = f(x)$ nei seguenti casi:

$$10e^{-x}, 3e^{2x}, 2 \sin x, 2x^3 - 30, 3x + 5 \sin 2x, 2e^x - e^{-2x}, \sinh x;$$

$$u'' + u = \frac{1}{\cos x};$$

$$u'' + u = \sin 2x, \quad x \in [0; \pi], \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

ESERCIZIO n.14 Se $y \neq 0$ è soluzione di: $u''(x) + u'(x)f(x) + u(x)g(x) = 0$, allora

$$z(x) = cy(x) \int^x \frac{e^{-\int^t f(s) ds}}{y^2(t)} dt$$

è soluzione della stessa.

ESERCIZIO n.15 Si trovino le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$u'' - \tan x \cdot u' + 2u = 0, \quad u'' - u' + \frac{y}{x} = 0.$$

ESERCIZIO n.16 Si trovi lo sviluppo di Taylor in 0 della soluzione di $u'' = x^{101}u$.

ESERCIZIO n.17 Si risolvano le seguenti equazioni di tipo Eulero:

$$x^2 u'' + x u' - u = x \quad (x > 0), \quad x^2 u'' - 9x u' + 21u = 0, \quad u'' - \frac{u'}{x} + \frac{u}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

ESERCIZIO n.18 Si studino le seguenti equazioni di tipo Riccati:

$$u' = \frac{2}{x^2} - u^2, \quad u' = u^2 - ux + 1.$$

(*) ESERCIZIO n.19 Si trovino tutte le soluzioni $(u; \lambda)$, ove le incognite sono: u funzione definita su $[0; \pi]$, e λ numero reale, dei problemi:

$$u'' = \lambda \cdot u, \quad u(0) = u(\pi) = 0; \quad u'' = \lambda \cdot u, \quad u(0) = u(\pi);$$

$$u'' = \lambda \cdot u, \quad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi); \quad u'' = \lambda \cdot u, \quad u(0) = u(\pi) = u'(0) = u'(\pi) = 0.$$