Calcolo Differenziale ed Integrazione, compito del 17-12-2001

Soluzioni

1. L'integrale dato converge quando convergono i due integrali:

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} dx$$

Il primo integrale converge quando $\frac{1}{2}(\alpha-1) > -1$ e quindi $\alpha > -1$, mentre il secondo quando $-\frac{1}{2}(\alpha+1) > -1$ e quindi $\alpha < 1$. In conclusione, l'integrale converge per $-1 < \alpha < 1$.

2. Mediante la variazione delle costanti arbitrarie si ottiene come soluzione particolare:

$$v(x) = -x\cos x + (\log\sin x)\sin x$$

e quindi la soluzione generale è data da:

$$u(x) = v(x) + a\cos x + b\sin x$$

dove a e b sono coefficienti qualsiasi.

3. Si nota che, per ogni $x > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{\alpha\log x} - 1}{\alpha} = \log x$$

D'altra parte, $n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - \log x$ è illimitata per ogni n sia a destra, dal momento che ogni potenza di x cresce più velocemente del logaritmo, sia a sinistra, visto che $\log x$ è illimitata e $n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ è limitata. Ne segue che la convergenza non può essere uniforme sugli intervalli del tipo $(0, b)$ e (a, ∞).

Si vede facilmente che la convergenza è uniforme sugli intervalli del tipo $[1, b)$ e $(a, 1]$, con $a > 0$ e $b < \infty$, poichè in tali intervalli $n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - \log x$ è monotona in x. Ne segue che la convergenza è uniforme su tutti gli intervalli (a, b), con con $a > 0$ e $b < \infty$.

4. 1) $a_m = 0$ se m non è fattoriale di alcun numero naturale, quindi si ha:

$$\limsup_{m\to\infty} |a_m|^{\frac{1}{m}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (n^n)^{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log n}{(n-1)!}} = 1$$

e quindi il raggio di convergenza è 1.

2) Per il criterio del rapporto, abbiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$, quindi il raggio di convergenza è $\frac{1}{2}$.