Calcolo Differenziale e Integrazione, Anno Accademico 2001-2002, Matematica

Guasoni, Modica, Tortorelli

I foglio di esercizi
dal 1 ottobre 2001 al 5 ottobre

ESERCIZIO n. 1

Stabilre se i seguenti integrali impropri sono convergenti:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx\ ,\ \int_0^\infty \frac{(2+\cos x)\log x}{x^\alpha}dx \quad (\text{al variare del parametro } \alpha\in\mathbf{R})\ ,$$

$$\int_1^\infty \frac{e^x\arctan x}{((2x)^x-1)^2}\,dx\ ,\quad \int_0^\infty\left(1-\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right)dt\ ,\quad \int_1^\infty \frac{e^{-x^2}x^x-e^{x-2}}{1-x^x}dx\ ,$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-x^2}}dx\ ,\quad \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{\log(\cos x^2)^{\frac{1}{3}}}dx\ ,\quad \int_1^\infty\left((x^8-1)^{-\frac{1}{9}}-x^{-\frac{8}{9}}\right)dx.$$

ESERCIZIO n. 2

Si studi l'integrabilità, e quindi la convergenza degli integrali, al variare dei parametri reali α e β delle funzioni: $\dfrac{1}{x^\alpha|\log|x||^\beta}$, su ognuno dei domini $]0;\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2};1[$, $]1;\frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2};+\infty[$.

ESERCIZIO n. 3

Si studi l'integrabilità, e quindi la convergenza degli integrali, delle seguenti funzioni sui rispettivi domini:

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x\log(1+\sqrt{x})}\ ,\quad x\in]0;1[\ ;\quad \frac{1-(\cos x)^{\frac{1}{4}}\ +\ \log(1+x^{\frac{1}{2}})}{(\sin x+1-e^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{2}}}\ ,\quad x\in]0;1]\ ;$$

$$\frac{\arctan x}{((2x)^x-1)^2}\ ,\quad 0<x<\frac{1}{2}\ ;\quad \frac{1}{\sin\frac{1}{x}}-\frac{1}{\log(x+1)-\log x}\ ,\quad x>1\ ;$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\text{arsin}x}\ ,\quad x\in]0;1[\ ;\quad \frac{1}{1-|\cos(x^\alpha)|}\ ,\quad x\in]0;\pi[\ \ (\text{al variare del parametro } \alpha\in\mathbf{R})\ .$$

ESERCIZIO n. 4

a) Si provi mediante integrazione per parti e confronto che $\frac{\sin x}{x}$ ha integrale in senso generalizzato su $]0;+\infty[$ finito.

b) Si provi che se $x\mapsto g(x)$ è una funzione defimita su $[0;+\infty[$, decrescente ed infinitesima per $x\to+\infty$, e quindi non negativa, allora la funzione $g(x)\sin x$ ha integrale in senso generalizzato su $[0;+\infty]$ finito.

c) Che dire sull'integrale generalizzato di $|g(x)\sin x|$?

ESERCIZIO n. 5

Si studi l'integrabilità in senso generalizzato, ed eventualmente la convergenza degli integrali, su $]0;+\infty[$ delle funzioni $\sin(x^2)$, $\left(\sin \pi \left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2$ e $\sin \pi \left(x+\frac{1}{x}\right)$.

ESERCIZIO n. 6

Studiare il dominio e il comportamento asintotico agli estremi dello stesso delle seguenti funzioni $x \mapsto f(x)$:

$$\int_{2x-3}^{x+5} \frac{te^{t-1}}{2t-7}dt \ ; \quad \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}}dt \ ; \quad \int_0^{\tan x} \frac{\cos t}{1+t^2}dt \ .$$

ESERCIZIO n. 7

Posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, si studi il limite del rapporto $\dfrac{F(x)}{f(x)}$, $x \to +\infty$, nei seguenti casi:

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \ , \quad f(x) = e^x \ , \quad f(x) = xe^{x^2} \ , \quad f(x) = \log x \ .$$

ESERCIZIO n. 8

Si consideri $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, $\alpha > 0$. Si provi che è ben definito e quindi che $\Gamma(n) = (n-1)!$ per $n \in \mathbf{N}$.

ESERCIZIO n. 9

Si considerino gli integrali

$$\frac{1}{3}T(\kappa) \ = \ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{1-\kappa^2 t^2}}\,dt \quad , \qquad \kappa \in [0;1[.$$

a) Si calcoli $T(0)$ e si provi che per ogni $\kappa \in [0;1[$ tali integrali sono finiti.

b) Si studi al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il comportamento di $(T(\kappa) - T(0)) \cdot \kappa^{-\alpha}$ per $\kappa \to 0$.