Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche
L. Caputo, D.Iacopini, V.M. Tortorelli
Prima prova scritta **A**
22 gennaio 2008

ISTRUZIONI

a: dopo aver scritto nome cognome e numero di matricola,

b: giustificando i principali passaggi si risolvano i seguenti esercizi riportando le soluzioni sul presente foglio:

c: l'unico da consegnare.

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di massimo e minimo della funzione $x^2 - 3xy - z$ quando $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

ESERCIZIO 2. Integrare la funzione $\sqrt{x^2+y^2}z$ sulla superficie parametrica

$$]0, 2\pi[\times\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ni (\varphi, \theta) \mapsto (\cos\varphi(3+\sin\theta), \sin\varphi(3+\sin\theta), \cos\theta)$$

ESERCIZIO 3-a. Si risolva il problema ai dati iniziali per il sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 4y(t) \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

3-b Si disegni in modo approssimativo il comportamento delle traiettorie del sistema, mettendo in risalto eventuali comportamenti notevoli..

3-a Le componenti $(x(t), y(t))$ della soluzione risolvono l'equazione caratteristica $z''(t) - (3+4)z'(t) + (3\cdot 4 - 2)z(t) = 0$

$$z''(t) - 7z'(t) + 10z(t) = 0$$

Quindi $x(t)$ è del tipo $ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$ se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son le radici distinte del polinomio associato $\lambda^2 - 7\lambda + 10$, ovvero $ae^{\lambda_1 t} + bte^{\lambda_1 t}$ se vi è un'unica radice dello stesso

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \frac{5}{2} : \quad x(t) = ae^{5t} + be^{2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Per tale $x(t)$ si trova la corrispondente $y(t)$ usando la prima equazione ed osservando $x'(t) = 5ae^{5t} + 2be^{2t}$

$$y(t) = \frac{1}{2}(x'(t) - 3x(t)) = \frac{1}{2}(5ae^{5t} + 2be^{2t} - 3ae^{5t} - 3be^{2t}) = ae^{5t} - \frac{1}{2}be^{2t}$$ per cui

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{5t} + be^{2t} \\ ae^{5t} - \frac{b}{2}e^{2t} \end{pmatrix} = ae^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Imponendo le condizioni iniziali $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-\frac{b}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a+b=1 \\ a-\frac{b}{2}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=1 \\ a=\frac{b}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}b = 1 \\ a = b/2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2/3 \\ a = 1/3 \end{cases} \quad \underline{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{e^{5t}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$$