Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche
INTEGRAZIONE 2: V.M. Tortorelli
2007

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html -> ALTRI CORSI DI LAUREA -> Corso di laurea *****

1- TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILE: Sia $\Phi : y \in A \mapsto x = \Phi(y) \in \Phi(A)$ *iniettiva*, differenziabile con continuità, A e $\Phi(A)$ siano aperti misurabili di $\mathbf{R}^n$ e $d\Phi_y$ sia sempre invertibile. Allora se $x \mapsto f(x)$ è sommabile su $\Phi(A)$:

- $y \mapsto f(\Phi(y)) \left|det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(y)\right|$ è sommabile su A
- $\int_{\Phi(A)} f(x)dx = \int_A f(\Phi(y)) \left|det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(y)\right| dy.$ $\qquad \left(dx = \left|det\frac{\partial\Phi}{\partial y}(y)\right| dy\right).$

• Si osservi che tale enunciato comprende, nel caso in cui $f = 1$, l'invarianza per rotazione e riflessione della misura.

Osservazione Nel caso di integrali per funzioni di una variabile il teorema corrisponde alla formula

$$\int_{[\min\{\Phi(a),\Phi(b)\},\max\{\Phi(a),\Phi(b)\}]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(\Phi(y))|\Phi'(y)|dy$$

con Φ *iniettiva* e derivabile con continuità.
Questa formula per il cambiamento di variabile *non orientato* non va confusa con con la già menzionata formula per il cambiamento di variabile *orientato*, data da:

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\Phi(y))\Phi'(y)dy$$

con Φ solo derivabile con continuità.

2 - INTEGRAZIONE NON ORIENTATA SU SUPERFICIE

Definizione - Un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^k$ si dice *aperto* se per ogni $p \in A$ vi è un palla di centro p *interamente contenuta* in A.
- Un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^k$ si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto.

Osservazione: Un insieme C è chiuso se e solo se ogni limite di successione x^n, $n \in \mathbf{N}$, di *elementi* di C deve a sua volta essere un elemento di C. A parole: ogni elemento approssimabile con elementi di C deve essre in C.
- La *chiusura* di un insieme E è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono E e si inidca con $\overline{E}$.
- La *parte interna* di un iniseme E è l'unione di tutti gli aperti contenuti in E e si indica con $\mathring{E}$

Definizione - Si dice *k-superficie (parametrica) regolare* una funzione $\psi : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ ove $A = \overline{\mathring{A}}$ è connesso, e $k \leq n$, per cui:

i- la ψ è restrizione di una funzione con derivate continue su $\mathbf{R}^k$
ii- i vettori $\frac{\partial\psi}{\partial t_1}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial t_1}$ generano un sottospazio di dimensione k in $\mathbf{R}^n$ (tangente all'immagine):

ovvero vi siano k indici $m_1, \ldots m_k$ per cui $det(\frac{\partial\psi_{m_i}}{\partial t_j})_{1\leq i,\ j\leq k} \neq 0$
- Una superficie parametrica si dirà *semplice* se è iniettiva.

Una $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{n-k}$ che sia C^1 intorno alla chiusura di A da naturalmente una k-superficie che parametrizza il suo grafico $x \mapsto \psi(x) = (x, f(x))$

Integrazione non orientata di funzioni su superficie parametrica Sulla falsariga del teorema di cambiamento di variabile negli integrali multipli, considerando la corrispondenza tra somma dei determinanti minori $k \times k$ di k vettori in $\mathbf{R}^n$ e k-volume del k-parellepipedo da essi generato si definisce per una k-superficie ψ il suo k volume come "somma infinita" dei k-volumi dei parellelpipedi "infinitesimi tangenti" dati dall'approssimazione lineare.

Denotando con $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ la matrice $\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t_j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le k}}$, con n righe e k colonne, delle derivate del "vettore posizione" ψ si definisce quindi:

$$Vol_k(\psi) = \int_A \sqrt{det\ {}^t\frac{\partial\psi}{\partial t}\ \frac{\partial\psi}{\partial t}}dt = \int_A \sqrt{\sum_{1\le m_1<\ldots m_k\le n} det\left(\frac{\partial\psi_{m_i}}{\partial t_j}\right)^2} dt_1\ldots dt_k$$

$dVol_k = \sqrt{det\ {}^t\frac{\partial\psi}{\partial t}\ \frac{\partial\psi}{\partial t}}dt;$

nel caso di grafici $\psi(t) = (t, f(t))$ si ha in particolare:

$dVol_k = \sqrt{1 + |\nabla f(t_1,\ldots t_k)|^2} = \sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial t_1}^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t_k}^2}$

NOTA: per una superficie semplice in effetti ciò corrisponde all'dea intuitiva di misura della sua immagine. Altrimenti tale nozione tiene conto delle diverse "sovrapposizioni" (su sottoinsiemi di misura non nulla del dominio) date dalla parametrizzazione.

- Data una funzione continua g sull'immagine di una k-superficie ψ condominio misurabile, si definisce l'integrale di g su ψ:

$$\int_\psi gdVol_k = \int_A g(\psi(t_1,\ldots t_k))\sqrt{\sum_{1\le m_1<\ldots m_k\le n} det\left(\frac{\partial\psi_{m_i}}{\partial t_j}\right)^2} dt_1\ldots dt_k$$

- Nel caso di ipersuperficie che sia un grafico $\psi(t) = (t, f(t))$ ovvero $k = n-1$ e $f : A \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$, si ottiene:

$\int_\psi gdVol_k = \int_A g(t_1,\ldots t_k, f(t_1\ldots t_k))\sqrt{1 + |\nabla f(t_1,\ldots t_k)|^2}dt_1\ldots dt_k$

- Nel caso di cammini C^1 a tratti, si ottiene: $\int_\gamma gd\mathcal{L} = \int_a^b g(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$

• Se $h : D \subseteq \mathbf{R}^k \to A \subset \mathbf{R}^k$ è un cambiamento di variabile regolare (con A e D misurabili e h iniettiva con differenziale invertibile) dal teorema di cambiamento di variabile segue che gli integrali rispetto a una superficie $t \mapsto \psi(t)$ su A sono eguali a quelli rispetto alla superficie $s \mapsto \psi(h(s))$.Questa proprietà garantisce che la definizione non dipende " dalla parametrizzazione".

• Nel caso di un insieme C unione di pezzi che si intersecano solo su parti di dimensione minore e parametrizzati da (immagini di) k-superficie semplici ha quindisenso scrivere

$$\int_C g(P)dVol_k$$

intendendo la somma degli integrali delle singole superficie componenti

• Nel caso in cui si debba trattare un luogo di zeri in $\mathbf{R}^n$ di una funzione G differenziabile con continuità e a valori in $\mathbf{R}^{n-k}$: $E = \{x \in \mathbf{R}^n : G(x) = 0\}$ il teorema delle funzioni implicite permette in moltissimi casi di esprimere *localmente* l'elemento di k volume direttamente in termini delle derivate di G.

Nel caso $n = 3$, $k = 2$ se si ha per esempio $\frac{\partial G}{\partial z} \ne 0$ allora $E = \{(x,y,z) : G(x,y,z) = 0\}$ è in un cilindro $A \times I$ del tipo $\{(x,y,z) : z = \varphi(x,y),\ (x,y) \in A\}$, cioè un grafico e quindi una superficie parametrica semplice

$\int_{E\cap A\times I} gdVol_2 = \int_A g(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}dxdy$

considerando che le derivate di φ si esprimono con quelle di G si ha quindi

$\int_{E\cap A\times I} gdVol_2 = \int_A g(x,y,\varphi(x,y))\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2}}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|}dxdy$

ALCUNE FORMULE NOTEVOLI

- Barcicentro di una regione $A \subset \mathbf{R}^n$ di misura non nulla: $\vec{b} = (b_1, \dots b_n) = \dfrac{1}{m(A)} \int_A \vec{x} dx_1 \dots dx_n$
- Baricentro di una curva γ o superficie Φ in forma parametrica

$$(b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\mathcal{L}(\gamma)} \int_\gamma (x, y, z) d\mathcal{L},\ (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\text{Area}(\Phi)} \int_\Phi (x, y, z) dVol_2$$

- Integrali nel piano con coordinate polari $(x, y) = \Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$\int\int f(x, y) dxdy = \int\int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdrd\varphi$$

- Integrali nello spazio con coordinate cilindriche $(x, y, z) = \Phi(r, z, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$

$$\int\int\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdrd\varphi dz$$

- Integrali nello spazio con coordinate sferiche $(x, y, z) = \Phi(\rho, \varphi, \theta) = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$$\int\int\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho^2 \cos\theta d\rho d\varphi d\theta$$

- Volume del solido generato dalla rotazione di una porzione piana connessa attorno ad una asse complanare che non la interseca

=

(area porzione piana)(angolo rotazione)(distanza media dall'asse di rotazione)

=

(area porzione piana)(angolo rotazione)(coordinata del baricentro della regione piana ortogonale all'asse)

=

(area porzione piana)(lunghezzza arco percorso del baricentro)

DIM caso in cui l' asse di rotazione è l'asse $x = 0,\ y = 0$, e D è nel piano $y = 0$. Sia D_α il solido ottenuto ruotando D di α. $vol(D_\alpha) = \int_{D_\alpha} dxdydz =$ coordinate cilindriche $\int_{D\times[0;\alpha]} rdrd\varphi dz =$ iterazione $\int_0^\alpha \left(\int_D rdrdz\right) d\varphi = m(D) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{m(D)} \int_D rdrdz$

- Area superficie generata dalla rotazione di una curva piana attorno ad una asse complanare che non la interseca = (lunghezza curva)(lunghezza arco descritto dal baricentro della curva)

DIM caso in cui l' asse di rotazione è l'asse $x = 0$, $y = 0$, e la curva C è l'immagine iniettiva di $t \mapsto (f(t), 0, g(t)), a \le t \le b$ con $f(t) \ge 0$. Sia C_α la superficie ottenuta ruotando di α. Essa è immagine di $(t, \varphi) \mapsto (f(t)\cos\varphi, f(t)\sin\varphi, g(t)), (t, \varphi) \in [a; b] \times [0; \alpha]$, quindi dalla definizione

$$area(C_\alpha) = \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{det \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta & f'(t)\sin\theta & g'(t) \\ -f(t)\sin\theta & f(t)\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta & -f(t)\sin\theta \\ f'(t)\sin\theta & f(t)\cos\theta \\ g'(t) & 0 \end{pmatrix}} dtd\varphi$$

$$= \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{det \begin{pmatrix} (f'(t))^2 + (g'(t))^2 & 0 \\ 0 & (f(t))^2 \end{pmatrix}} dtd\varphi = \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} f(t) dtd\varphi$$

$$= \text{iterazione} \int_0^\alpha \left(\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} f(t) dt\right) d\varphi = \mathcal{L}(C) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\mathcal{L}(C)} \int_C x d\mathcal{L}$$

CASI PARTICOLARI

volume di rotazione attorno all'asse delle x del sottografico di $y = f(x) \ge 0 = \frac{\alpha}{2} \cdot \int f^2(x) dx$

volume di rotazione attorno all'asse delle y del sottografico di $y = f(x) \ge 0, x \in [a; b], a \ge 0$ $= \alpha \int_a^b x f(x) dx$

area di rotazione attorno all'asse delle x del grafico di $y = f(x) \ge 0 = \alpha \int f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

area di rotazione attorno all'asse delle y del grafico di $y = f(x) \ge 0, x \in [a; b], a \ge 0 =$ $\alpha \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

INTEGRAZIONE ORIENTATA SU SUPERFICIE