**Matematica, Anno Accademico 2007-2008, Scienze Geologiche**
INTEGRAZIONE: V.M. Tortorelli
13-15 novembre 2007

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html -> ALTRI CORSI DI LAUREA -> Corso di laurea *****

---

RIEMANN INTEGRABILTÀ E SOMMABILITÀ IN SENSO GENERALIZZATO

**Misurabilità alla Peano-Jordan**

- Un $n$-rettangolo (cartesiano) in $\mathbf{R}^n$ è il prodotto cartesiano di $n$ intervalli: $R = I_1 \times \dots I_n$, $I_i$, $1 \leq i \leq n$ intervalli limitati con o senza estremi inclusi in $\mathbf{R}$.
- La misura elementare di un $n$ rettangolo è il prodotto delle differenze degli estremi dei lati.

**Definizione** se $A \subset \mathbf{R}^n$ non vuoto e *limitato* si dice *misurabile secondo Peano-Jordan* se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} me(R)$ : al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli disgiunti contenuti in $A$ (approssimazione interna)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} me(R)$ : al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli con unione contenente $A$ (approssimazione esterna)

Nel caso il valore si dice misura ($n$-dimensionale) di Peano-Jordan: $m(A)$, $m_n(A)$. Si ha:
• $m(\emptyset) = 0$, • $m(R) = me(R)$ se $R$ è rettangolo cartesiano, • $m(A) \leq m(B)$ se $A \subseteq B$,
• se $A$ e $B$ hanno misura la hanno $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

**Integrabilità alla Riemann** Una funzione *limitata* $f$ a valori in $\mathbf{R}$ si dice Riemann integrabile su un $n$-rettangolo $Q$ (nulla fuori da $Q$) se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} \inf_R f me(R)$ : al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli con parti interne disgiunte con unione $Q$
(approssimazione inferiore)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} \sup_R f me(R)$ : al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli con unione $Q$
(approssimazione superiore)

In tal caso il comune valore si dice integrale di Riemann di $f$ su $Q$ e si indica con $\int_Q f(x)dx$.

**Osservazione** $A$ è P.-J. misurabile se e solo se $\chi_A$ è R.-integrabile e $m(A) = \int \chi_A$.

**Teorema 1.i**- se $f \geq 0$ allora $f$ è R.-integrabile su $Q$ se e solo se il suo sottografico su $Q$ è P.J.-misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$. Nel caso $m_{n+1}(\{(x,y) : \ x \in Q, \ 0 \leq y \leq f(x)\}) = \int_Q f(x)dx$.
**ii**- una funzione continua $f$ su un n-rettangolo chiuso $R$ è R.-integrabile.
• Dai teoremi degli zeri e di Weiestrass segue: vi è $\xi \in R$ per cui $\frac{1}{m(R)} \int_R f dx = f(\xi)$.
**iii**- se $f$ e $g$ sono R.-integrabili tale è $fg$.
• Se $g = \chi_A$ l'integrale di questo prodotto si indica con $\int_A f(x)dx$.
Una funzione costante $f(x) = 14$ su $A$ misurabile è integrabile e $\int_A f = 14m(A)$

**Osservazione** - I razionali tra 0 ed 1 non sono un insieme misurabile: non contentendo alcun intervallo la misura interna è nulla mentre ogni intervallo contiene un razionale quindi la misura esterna è 1.
- Vi sono sottoinsiemi del piano non limitati per cui i limiti delle misure delle loro intersezioni con quadrati sempre più grandi sono finiti: *e.g.* si consideri l'unione dei rettangoli di basi rispettive $[n-1, n]$ e altezza $\frac{1}{2^{n-1}}$. La somma delle prime $N$ aree è $1 + 1/2 + \dots 1/2^{N-1} = 2(1 - 1/2^N) \to 2$
- Analogamente vi sono funzioni non limitate per cui i limiti degli integrali delle "troncate " sono finiti: *e.g.* si consideri la funzione il cui sottografico è l'insieme del precedente esempio ruotato di $\pi/2$.

Conviene quindi estendere il concetto di integrale e di misura a funzioni e domini non limitati come segue:

**Sommabilità.**

- Una una funzione a valori reali *non negativa* $f$ si dice *sommabile* in senso generalizzato se:
  - $\forall m \in \mathbf{N}$ $f \wedge m$ è R.-integrabile su $[-m;m]^n$, - $\lim_{m\to\infty} \int_{[-m;m]^n} f(x) \wedge m dx \in \mathbf{R}$.

Tale limite si dirà integrale in senso generalizzato e si indicherà con $\int f dx$.

Una funzione a valori reali si dice sommabile se lo sono la sua parte positiva $\max\{f(x), 0\}$ e la sua parte negativa $\max\{-f(x), 0\}$ . Il suo integrale in senso genaralizzato sarà la differenza tra quelli delle sue parti.

• Una funzione a valori vettoriali si dirà sommabile se lo sono le sue componenti. Nel caso l'integrale sarà dato dal vettore degli integrali delle componenti.

**Teorema 2.** Proprietà principali

**1**- le funzioni sommabili formano uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare;

**2**- il minimo e il massimo tra due funzioni sommabili sono anch'essi sommabili (reticolo),

- se $f \geq g$ allora $\int f \geq \int g$ (monotonia dell'integrale),

**3**- $|\int f| \leq \int |f|$ (diseguaglianza triangolare),

**4** - se $A$ e $B$ sono misurabili in senso generalizzato tali sono $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ (semialgebra),

- se $f$ è sommabile sull'unione allora $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$ (additività).

NOTA: se $f$ e $g$ sono sommabili non è detto che il loro prodotto lo sia: e.g. $f{=}g{=}\frac{1}{\sqrt{x}}$. Se una delle due è limitata si.

**5**- $\int f(x+v)dx = \int f(x)dx$ (invarianza per traslazioni).

**6**- TEOREMA DI RIDUZIONE E SCAMBIO. Posto $x = (x', x'') \in \mathbf{R}^n$, con $x' \in \mathbf{R}^k$, $x'' \in \mathbf{R}^{n-k}$ se:

i- $x \mapsto f(x)$ è sommabile in $\mathbf{R}^n$

ii- per ogni $x'' \in \mathbf{R}^{n-k}$ la $x' \mapsto f(x', x'')$ è sommabile in $\mathbf{R}^k$, allora:

$x'' \mapsto \int f(x', x'')dx'$ è sommabile in $\mathbf{R}^{n-k}$ e $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \left(\int_{\mathbf{R}^k} f(x', x'')dx'\right) dx''$.

Se invece di ii vale

iii- per ogni $x' \in \mathbf{R}^k$ la $x'' \mapsto f(x', x'')$ è sommabile in $\mathbf{R}^{n-k}$, allora:

$x' \mapsto \int f(x', x'')dx''$ è sommabile in $\mathbf{R}^{n-k}$ e $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^k} \left(\int_{\mathbf{R}^{n-k}} f(x', x'')dx''\right) dx'$

Nel caso in cui valgano sia ii che iii si ha quindi

$$\int_{\mathbf{R}^{n-k}} \left(\int_{\mathbf{R}^k} f(x', x'')dx'\right) dx'' = \int_{\mathbf{R}^k} \left(\int_{\mathbf{R}^{n-k}} f(x', x'')dx''\right) dx'.$$

**Osservazione** per integrare funzioni continue su insiemi che siano unione di insiemi compresi tra grafici di funzioni continue (con un una variabile in meno) definite a loro volta su insiemi dello stesso tipo fino ad arrivare a unioni di sottoinsiemi del piano compresi tra grafici di funzioni continue su un intervallo,l'iterata applicazione del teorema permette la riduzione degli integrali di più dimensioni ad *integrali iterati di una variabile, e.g.*

$$\int_{g(x,y)\leq z\leq f(x,y),\ h(x)\leq y\leq k(x),\ a\leq x\leq b} \varphi(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \varphi(x,y,z)dz\right) dy\right) dx$$

**DEFINIZIONE:** Una funzione $x \mapsto F(x)$ definita su un intervallo $I$ si dice *primitiva sull'intervallo* di una funzione $x \mapsto f(x)$ se: $F$ è derivabile su $I$ e $F' = f$ su $I$. La *famiglia delle primitive di* $f$ su un intervallo si indica con $\int^x f$.
- Due primitive su un intervallo differiscono per una costante, avendo appunto la stessa derivata: basta applicare il teorema di Lagrange alla loro differenza che ha appunto derivata nulla.

**TEOREMA** [FONDAMENTALE DEL CALCOLO : area calcolata con le primitive]
Se $f$ è continua su $[a;b]$ allora:
i- La funzione integrale $\int_{[a,x]} f(y)dy$ è una primitiva di $f$ per $x \in [a,b]$
ii- per ogni altra $F$ primitiva di $f$ su $[a;b]$ si ha: $\int_{[a,b]} f(x)dx = F(b) - F(a)$.

- [PRIMITIVE DI BASE]

| $f(x)$ | $\int^x f = F(x)$ |
|---|---|
| $e^x$ | $e^x + a$ |
| $f = x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $a + \log x$ se $x > 0$<br><br>$b + \log(-x)$ se $x < 0$ |
| $\cos x$ | $\sin x + a$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + a$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $a_k + \tan x$ se $x \in ]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbf{Z}$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $a + \text{artan}x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $a + \text{arsin}x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $a + \log(x + \sqrt{1+x^2})$<br>l'inversa di arcosenoiperbolico: $\text{arsinh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. |

Nel caso di integrali di funzione di una variabile è conveniente enunciare il seguente teorema per funzioni non necessariamente iniettive:

**Teorema 3.** - CAMBIAMENTO DI VARIABILE ORIENTATO, SOSTITUZIONE Sia $\Phi : y \in [a,b] \mapsto x = \Phi(y) \in [\alpha, \beta]$ con *derivata continua* ed $f$ continua. Allora:

$$\text{segno}(\Phi(b) - \Phi(a)) \int_{[\min\{\Phi(a),\Phi(b)\},\max\{\Phi(a),\Phi(b)\}]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(\Phi(y))\Phi'(y)dy$$

**Definizione** Per funzioni di una variabile si può facilmente parlare di integrali *orientati* considerando un senso di percorrenza del segmento ove si integra e cambiando segno all'integrale. Per questo se $a < b$ si usano le seguenti notazioni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx \ , \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Quindi la precedente formula si scrive $\displaystyle\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\Phi(y))\Phi'(y)dy$

Si elencano i principali metodi per il calcolo delle primitive e degli integrali:

- [SOSTITUZIONE] *regola della catena* $F(x) = G(t(x))$ : $f(x) = \frac{dG}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x)$, $t = t(x)$:

[SOSTITUZIONE INVERSA] $G(t) = F(x(t))$ : $f(x(t)) = \frac{dG}{dt}(t)\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^{-1}$, $x = x(t)$, $dx = \frac{dx}{dt}(t)dt$ per avere la risposta bisogna quindi trovare l'inversa di $t \mapsto x(t)$:

- [PARTI] *derivata di un prodotto* $F' = G'H = (GH)' - GH'$

- [RAZIONALI SEMPLICI]

**PROPOSIZIONE** - Ogni polinomio reale in una variabile si esprime come prodotto di fattori del tipo: $a$, $(x-b)^n$ , $((x-c)^2+d^2)^m$, ove i $b$ sono le radici reali, e la somma degli $n$ e dei $2m$ il grado del polinomio.

- Quindi un rapporto di polinomi, con denominatore di grado maggiore, si scrive come somma di addendi dei seguenti tipi:

$$a, \quad \frac{a}{(x-b)^n}, \quad \frac{a}{((x-c)^2+d^2)^m}, \quad \frac{ax}{((x-c)^2+d^2)^n}$$

quindi per calcolare le primitive di rapporti di polinomi basta saper calcolalare le primitive di funzioni di questo tipo.

Per il calcolo delle primitive di funzioni di questo tipo ci si riduce mediante una cambiamento di variabile affine al calcolo delle seguenti primitive

$$\frac{1}{x^n} \mapsto \begin{cases} \begin{cases} \log x + a & x > 0 \\ \log(-x) + b & x < 0 \end{cases} & n = 1 \\ -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + a & n > 1 \end{cases} \qquad \frac{x}{(x^2+1)^n} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\log(1+x^2) + a & n = 1 \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + a & n > 1 \end{cases}$$

$$I_1 =: \int^x \frac{1}{1+x^2} \mapsto \mathrm{artan} x + a,$$

$$I_n =: \int^x \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \int^x \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \quad n > 1$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA ED INTEGRAZIONE SU CURVE

**Lunghezza** - Si dice *lunghezza di un cammino* $\gamma : [a;b] \to \mathbf{R}^n$ continuo

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup\{\sum_{i=0}^{N-1} dist(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : \; a = t_0 < t_1 < \ldots t_N = b\}$$

- Se $\gamma(t) = \varphi(h(t))$, $h : [c;d] \to [a;b]$ continua, monotona surgettiva allora $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\varphi)$.

NOTA: intuitivamente la lunghezza definita non corrisponde alla misura dell'immagine ma alla misura del percorso fatto. Per cammini che si autointersecano in un numero finito di punti da' proprio una misura dell'immagine.

**Definizione** Una funzione di una variabile si dice *continua a tratti* su un intervallo se vi è una suddivisione di questo in intervalli chiusi su ognuno dei quali la funzione sia continua.

Una funzione si dice $C^1$-*tratti* se vi è una suddivisione di questo in intervalli chiusi su ognuno dei quali la funzione sia continua e derivabile con derivata continua.

**Teorema 4** Se $\gamma : [a;b] \to \mathbf{R}^n$ è continua e $C^1$ a tratti $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$

**Definizione**- [INTEGRAZIONE NON ORIENTATA, DI FUNZIONI] Se $\gamma$ è un cammino $C^1$ a tratti in $\mathbf{R}^n$ e $g$ una funzione continua dall'immagine di $\gamma$ a valori reali, si definisce:

$$\int_\gamma g d\mathcal{L} = \int_a^b g(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \int_a^b g(\gamma(t))\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \ldots \gamma_n'(t)^2}dt$$

**Definizione** Se $\gamma$ è un cammino *iniettivo* e derivabile in $t_0$ con $\gamma'(t_0) \neq 0$ allora si definisce la direzione $\tau(\gamma(t_0))$ tangente in $\gamma(t_0)$ come il vettore unitario

$$\tau = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$$

**Definizione** [INTEGRAZIONE ORIENTATA, DI VETTORI] Se $\gamma$ è un cammino $C^1$ a tratti in $\mathbf{R}^n$ e $V$ una trasformazione continua dall'immagine di $\gamma$ in $\mathbf{R}^n$, si definisce

$$\int_\gamma V = \int_a^b V(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)dt = \int_a^b V_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)dt + \ldots \int_a^b V_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)dt$$

**Osservazione** Nel caso di cammini iniettivi con derivata non nulla si ha $\int_\gamma V = \int_\gamma V \bullet \tau \; d\mathcal{L}$

**Teorema 5** - L'integrale di una funzione lungo un cammino non dipende dal senso di percorrenza ne dall'inensità delle velocità di percorrenza se si hanno gli stessi tratti di andata e ritorno, ovvero:
se $\gamma(t) = \varphi(h(t))$ con $h$ monotona, continua e surgettiva allora:

$$\int_\gamma g d\mathcal{L} = \int_\varphi g d\mathcal{L}$$

- L'integrale di una vettore lungo un cammino non dipende da come esso è percorso *tout-court* se non per il verso di percorrenza, ovvero:
se $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ e $\gamma(t) = \varphi(h(t))$ con $h$ continua e $\gamma(a) = \varphi(\alpha), \; \gamma(b) = \varphi(\beta)$

$$\int_\gamma V = \int_\varphi V$$

mentre se $\gamma(a) = \varphi(\beta), \; \gamma(b) = \varphi(\alpha)$ allora

$$\int_\gamma V = -\int_\varphi V$$

ALCUNE FORMULE NOTEVOLI

Si riportano alcune formule notevoli che riguardano anche nozioni (quali quello di area di una supeficie) non ancora presentate.

- Barcicentro di una regione $A \subset \mathbf{R}^n$ di misura non nulla: $\vec{b} = (b_1, \dots b_n) = \dfrac{1}{m(A)} \int_A \vec{x} dx_1 \dots dx_n$
- Baricentro di una curva $\gamma$ o superficie $\Phi$ in forma parametrica
$(b_1, b_2, b_3) = \dfrac{1}{\mathcal{L}(\gamma)} \int_\gamma (x, y, z) d\mathcal{L}$, $(b_1, b_2, b_3) = \dfrac{1}{\text{Area}(\Phi)} \int_\Phi (x, y, z) dVol_2$
- Integrali nel piano con coordinate polari $(x, y) = \Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
$\int\int f(x, y) dxdy = \int\int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdrd\varphi$
- Integrali nello spazio con coordinate cilindriche $(x, y, z) = \Phi(r, z, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$
$\int\int\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdrd\varphi dz$
- Integrali nello spazio con coordinate sferiche $(x, y, z) = \Phi(\rho, \varphi, \theta) = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)$
$\int\int\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta$

- Volume del solido generato dalla rotazione di una porzione piana connessa attorno ad una asse complanare che non la interseca

=

(area porzione piana)(angolo rotazione)(distanza media dall'asse di rotazione)

=

(area porzione piana)(angolo rotazione)(coordinata del baricentro della regione piana ortogonale all'asse)

=

(area porzione piana)(lunghezzza arco percorso del baricentro)

DIM caso in cui l' asse di rotazione è l'asse $x = 0$, $y = 0$, e $D$ è nel piano $y = 0$. Sia $D_\alpha$ il solido ottenuto ruotando $D$ di $\alpha$. $vol(D_\alpha) = \int_{D_\alpha} dxdydz =$ coordinate cilindriche $\int_{D\times[0;\alpha]} rdrd\varphi dz =$ iterazione $\int_0^\alpha \left(\int_D rdrdz\right) d\varphi = m(D) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{m(D)} \int_D rdrdz$
- Area superficie generata dalla rotazione di una curva piana attorno ad una asse complanare che non la interseca = (lunghezza curva)(lunghezza arco descritto dal baricentro della curva)
DIM caso in cui l' asse di rotazione è l'asse $x = 0$, $y = 0$, e la curva $C$ è l'immagine iniettiva di $t \mapsto (f(t), 0, g(t)), a \le t \le b$ con $f(t) \ge 0$. Sia $C_\alpha$ la superficie ottenuta ruotando di $\alpha$. Essa è immagine di $(t, \varphi) \mapsto (f(t)\cos\varphi, f(t)\sin\varphi, g(t)), (t, \varphi) \in [a; b] \times [0; \alpha]$, quindi dalla definizione

$$area(C_\alpha) = \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{det \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta & f'(t)\sin\theta & g'(t) \\ -f(t)\sin\theta & f(t)\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta & -f(t)\sin\theta \\ f'(t)\sin\theta & f(t)\cos\theta \\ g'(t) & 0 \end{pmatrix}} dtd\varphi$$

$$= \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{det \begin{pmatrix} (f'(t))^2 + (g'(t))^2 & 0 \\ 0 & (f(t))^2 \end{pmatrix}} dtd\varphi = \int_{[a;b]\times[0;\alpha]} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} f(t) dtd\varphi$$

$$= \text{iterazione} \int_0^\alpha \left( \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} f(t) dt \right) d\varphi = \mathcal{L}(C) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\mathcal{L}(C)} \int_C x d\mathcal{L}$$

CASI PARTICOLARI

volume di rotazione attorno all'asse delle $x$ del sottografico di $y = f(x) \ge 0 = \frac{\alpha}{2} \cdot \int f^2(x) dx$
volume di rotazione attorno all'asse delle $y$ del sottografico di $y = f(x) \ge 0, x \in [a; b], a \ge 0$ $= \alpha \int_a^b x f(x) dx$
area di rotazione attorno all'asse delle $x$ del grafico di $y = f(x) \ge 0 = \alpha \int f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
area di rotazione attorno all'asse delle $y$ del grafico di $y = f(x) \ge 0, x \in [a; b], a \ge 0 =$ $\alpha \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$