Esercizi 30/11/2007

1 Numeri complessi

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$, identificare sul piano cartesiano i numeri complessi tali che $z^n = 1$ (suggerimento: usare la rappresentazione $z = \rho e^{i\theta}$).
- Sia $f(z) = \frac{1}{z}$. Dimostrare che

$$f(\{z \in \mathbb{C}^\times \mid z = x + iy,\, x = cy\}) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z = x + iy,\, x = -cy\}$$

$$f(\{z \in \mathbb{C}^\times \mid z = x + iy,\, x = 1\}) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

$$f(\{z \in \mathbb{C}^\times \mid z = x + iy,\, x^2 + (y-1)^2 = 1\}) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid y = 1/2\}$$

2 Funzioni definite implicitamente

- Vogliamo disegnare il luogo di zeri

$$L = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2y + 1 - x^2 + x^4 = 0\}$$

Per fare ciò studiamo i punti attorno ai quali L può essere descritto come grafico di una funzione di una variabile. Siamo portati a considerare $f(x,\, y) = (y-1)^2 - x^2(1-x^2)$ come funzione di secondo grado in y e a scrivere

$$y = 1 \pm |x|\sqrt{1-x^2}$$

tale scrittura ha senso solo se $|x| \leq 1$. L è allora l'unione dei grafici delle funzioni

$$x \mapsto 1 + |x|\sqrt{1-x^2} \qquad x \mapsto 1 - |x|\sqrt{1-x^2}$$

definite per $|x| \leq 1$. Il teorema di Dini ci dice che c'è esplicitabilità locale unica al di fuori del punto $(0,\, 1)$.

- Trovare i punti del luogo di zeri

$$L = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$$

per cui è applicabile il teorema del Dini.

- Il luogo di zeri $L = \{y^2 + x^2 - 2xy = 0\}$ non ha alcun punto per cui sia applicabile il teorema del Dini e L è esplicitabile come grafico intorno a qualsiasi suo punto.

3 Integrali multipli su domini normali

- Verificare che la funzione $f(x, y) = x^2 + \sin y$ è integrabile su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0,\, x + y < 1\}$ e calcolare $\int_E f(x, y)dx\,dy$.
  Osserviamo in primo luogo che E è (la parte interna de) il triangolo rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. La funzione f è continua su E ed E ha chiusura compatta[1] quindi f è integrabile su E. Consideriamo la x-sezione f_x di f ossia la funzione

$$y \mapsto f(x, y)$$

  Per ogni $0 \leq x_0 \leq 1$, f_{x_0} è integrabile su $E \cap \{x = x_0\}$ quindi

$$\int_E f(x, y)dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y(x_0)} f_{x_0} dy \right) dx_0$$

  dove $y(x_0)$ è l'ordinata del punto di intersezione tra la retta $x = x_0$ e la retta $y = -x + 1$ (quest'ultima contiene l'ipotenusa di E). Un rapido calcolo dà

$$y(x_0) = 1 - x_0$$

  Osserviamo allora che

$$\int_0^{y(x_0)} f_{x_0} dy = \int_0^{1-x_0} (x_0^2 + \sin y)dy = \left[x_0^2 y - \cos y\right]_0^{1-x_0} =$$

$$= x_0^2(1 - x_0) - \cos(1 - x_0) + 1$$

  e quindi

$$\int_E f(x, y)dx\,dy = \int_0^1 \left(x_0^2(1 - x_0) - \cos(1 - x_0) + 1\right) dx_0 =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x_0^3 - \frac{1}{4}x_0^4 + x - \sin(x - 1)\right]_0^1 = \frac{13}{12} - \sin 1$$

- Verificare che, se $f_y(x) = f(x, y)$, allora per ogni $0 \leq y_0 \leq 1$, f_{y_0} è integrabile su $E \cap \{y = y_0\}$ e

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x(y_0)} f_{y_0} dx \right) dy_0 = \frac{13}{12} - \sin 1 = \int_E f(x, y)dx\,dy$$

- Dire quanto vale l'integrale di f sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\}$$

[1] Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si dice avere chiusura compatta se la chiusura di E è contenuta in una palla di $\mathbb{R}^n$, cioè in $B_r = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ per qualche $r > 0$. Si ricordi che la chiusura di E è l'insieme dei punti di accumulazione di E.

- Gli esercizi proposti finora in questa sezione sono casi particolari della cosiddetta integrazione su domini normali. Un dominio normale rispetto all'asse x in $\mathbb{R}^2$ è un insieme del tipo

$$E = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in I,\, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

dove I è un intervallo limitato di $\mathbb{R}$ e $\alpha,\, \beta : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni integrabili su I. In altre parole il dominio E è una porzione di piano compresa tra i grafici delle funzioni α e β. C'è un'analoga definizione per domini normali rispetto all'asse y. Se $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su E e f_x è integrabile, si ha allora

$$\int_E f(x,\, y) dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x dy \right) dx$$

dove $a = \inf I$ e $b = \inf I$.

- Vogliamo calcolare l'area dell'ellisse $E_{a,\,b}$ di semiassi a, b utilizzando quanto fatto finora. Si ha

$$E_{a,\,b} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

In questa forma $E_{a,\,b}$ non è un dominio normale. Possiamo però esprimerlo come unione di domini normali: il teorema di Dini ci dice che il bordo di $E_{a,\,b}$ sarà esprimibile come grafico di una funzione di x salvo che intorno ai punti $(\pm a,\, 0)$ e come grafico di una funzione di y salvo che intorno ai punti $(0,\, \pm b)$. Possiamo allora considerare la seguente scrittura di $E_{a,\,b}$:

$$E_{a,\,b} = R_{a,\,b} \cup P_{sopra} \cup P_{sotto} \cup P_{destra} \cup P_{sinistra}$$

dove $R_{a,\,b}$ è il rettangolo definito da

$$R_{a,\,b} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}},\, -\frac{b}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{b}{\sqrt{2}}\}$$

e

$$P_{sopra} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}},\, \frac{b}{\sqrt{2}} \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\}$$

$$P_{sotto} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}},\, -\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq -\frac{b}{\sqrt{2}}\}$$

$$P_{sopra} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\frac{b}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{b}{\sqrt{2}},\, \frac{a}{\sqrt{2}} \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\}$$

$$P_{sinistra} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\frac{b}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{b}{\sqrt{2}},\, -\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \leq y \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}\}$$

Utilizzando quanto finora detto e ricordando che

$$\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{x^2}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c \right)$$

per qualche costante c (e formula analoga per la primitiva di $\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$) è quindi semplice verificare che l'area di $E_{a,\, b}$ è πab.

- Si parla anche di dominio normale rispetto al piano xy intendendo con ciò un insieme

  $$E = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,\, y) \in D,\, \alpha(x,\, y) \leq z \leq \beta(x,\, y)\}$$

  dove D è misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^2$ e $\alpha,\, \beta : D \to \mathbb{R}$ sono integrabili. Se $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su E e $f_x y(z) = f(x,\, y,\, z)$ è integrabile, si ha allora

  $$\int_E f(x,\, y,\, z) dx\, dy\, dz = \int_D \left(\int_{\alpha(x,\, y)}^{\beta(x,\, y)} f_{xy}(z) dz \right) dx\, dy$$

- Mostrare che

  $$E = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, x + y + z \geq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0\}$$

  può essere descritto come dominio normale rispetto al piano xy.