1. Integrazione di funzioni razionali fratte

Si supponga di voler calcolare un integrale del tipo: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

(ove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'indeterminata x di grado assegnato).
Supponiamo che:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

I coefficienti a_i e b_i appartengano al campo reale e a_n e b_k siano diversi da zero in modo da non abbassare il grado dei polinomi.
Si possono presentare tre casi:

- $\mathrm{gr}(P(x)) > \mathrm{gr}(Q(x))$;
- $\mathrm{gr}(P(x)) = \mathrm{gr}(Q(x))$;
- $\mathrm{gr}(P(x)) < \mathrm{gr}(Q(x))$.

1.1. I Caso: gr(P(x)) > gr(Q(x))

Per poter calcolare l'integrale si esegue la divisione tra i polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ e si sostituisce il risultato nell'integrale stesso.
Esistono due metodi per eseguire la divisione tra polinomi:

- **I metodo**: si esegue l'usuale **divisione**.
- **II metodo**: si utilizza il **principio di identità dei polinomi**.

Esempio Sia $\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}dx$

Si noti che $\mathrm{gr}(P(x)) = 3$ (grado del polinomio al numeratore) e che $\mathrm{gr}(Q(x)) = 2$ (grado del polinomio a denominatore).
Si può eseguire la divisione:

$x^3 + 3x^2$	$x^2 + 1$	
$-x^3 \quad -x$	$x + 3$ ⇦	quoziente
$0 \; + 3x^2 \; -x$		
$-3x^2 \quad -3$		
$-x \; -3$	⇦	resto

e risulta:

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} = x+3+\frac{-x-3}{x^2+1}$$

e quindi :

$$\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}dx = \int (x+3)dx + \int \frac{-x-3}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} - 3\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-3\,\mathrm{arctg}\,x+c$$

Si perviene al medesimo risultato utilizzano il **principio di identità dei polinomi.**
Osservando che :

$$gr\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = gr(P(x)) - gr(Q(x)) = gr(x^3 - 3x^2) - gr(x^2 - 1) = 3 - 2 = 1$$

il polinomio può essere riscritto nel modo seguente:

$$\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

ove: $ax + b$ è il polinomio quoziente e $cx + d$ è il resto della divisione.
Eguagliando ambo i membri, si ricava:

$$x^3 + 3x^2 = (ax + b)(x^2 + 1) + cx + d$$

Da cui si può determinare il valore di *a, b, c,* e *d,* imponendo l'eguaglianza tra il polinomio del I membro e quello del II membro. Si ricava:

$$x^3 + 3x^2 = ax^3 + ax + bx^2 + b + cx + d \equiv ax^3 + bx^2 + (a + c)x + b + d$$

Da cui:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -1 \\ d = -3 \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati si perviene allo stesso risultato ottenuto prima:

$$\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} = x + 3 + \frac{-x - 3}{x^2 + 1}$$

1.2. II Caso: *gr*(*P*(*x*)) = *gr*(*Q*(*x*))

In questo caso non si segue una regola ben definita: le operazioni da eseguire dipendono dai polinomi in gioco; è comunque possibile eseguire ancora la divisione tra polinomi.

Esempio:

$$\int \frac{x}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{2x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x-1} =$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\log|2x-1| + c$$

1.3. III Caso: *gr*(*P*(*x*))< *gr*(*Q*(*x*))

Va ricordato che il **Teorema Fondamentale dell'Algebra** afferma che un polinomio di grado n ammette esattamente n radici nel campo complesso; tale proprietà verrà sfruttata per decomporre il polinomio $Q(x)$ in fattori primi irriducibili.
Le radici di $Q(x)$ possono essere o reali o complesse coniugate (a due a due), con molteplicità maggiore o uguale a uno.
Supponiamo che il polinomio $Q(x)$ ammetta la seguente decomposizione:

$$Q(x) = k(x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2}\ldots(x - \alpha_k)^{m_k}\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{r_1}\ldots\left(x^2 + p_jx + q_j\right)^{r_j}$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono radici reali e i polinomi $x^2 + p_h x + q_h$ corrispondono alle coppie di radici complesse coniugate.
Gli "ordini di molteplicità" sono: $m_1, m_2, \ldots, m_k$ per le radici reali, $r_1, r_2, \ldots, r_j$ per le radici complesse coniugate, e devono soddisfare alla relazione:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k + 2r_1 + 2r_2 + \ldots + 2r_j = n \quad \text{(grado di } Q(x)).$$

Per semplicità considereremo in modo differente i casi relativi a radici reali distinte, a radici complesse coniugate e i casi con radici reali o complesse coniugate con molteplicità maggiore di uno.

1.3.1. *Radici reali distinte*

Si cercano le radici di $Q(x)$. Il denominatore della frazione si può decomporre nel seguente modo:

$$Q(x) = k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$$

Le radici: $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono per ipotesi reali e distinte di molteplicità uno.
Si cerca di scrivere la funzione integranda nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{A_k}{x-\alpha_k}$$

ove $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sono costanti reali da determinare in base ai polinomi assegnati.
Per determinare il valore delle costanti $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ci si avvale di due metodi distinti e fra di loro equivalenti:

I Metodo: Passaggio al limite.

Moltiplicando di volta in volta ambo i membri per $x - \alpha_h$ ($h = 1, 2, \ldots, k$), si ottiene:

$$\frac{(x-\alpha_h)P(x)}{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)} = \frac{A_1(x-\alpha_h)}{x-\alpha_1} + \frac{A_2(x-\alpha_h)}{x-\alpha_2} + \ldots \frac{A_h(x-\alpha_h)}{x-\alpha_h} + \ldots + \frac{A_k(x-\alpha_h)}{x-\alpha_k}$$

Ripetendo questa operazione per tutte le radici si ottengono k limiti da calcolare separatamente:

$$\lim_{x\to\alpha_h} \frac{(x-\alpha_h)P(x)}{Q(x)} = A_h$$

Tale relazione deve valere per ogni scelta di $h = 1, 2, \ldots, k$. Si osservi che di volta in volta al denominatore manca il termine $x - \alpha_h$.

Dal calcolo dei limiti così ottenuti, si ricava il valore delle costanti
$A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Esempio 1 Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,dx$

Si cercano le radici del polinomio a denominatore

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Quindi si identifica la funzione integranda con la seguente:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Moltiplicando ambo i membri per $(x-3)$ si ottiene:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)}{x-3}+\frac{B(x-3)}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-2}=A+\frac{B(x-3)}{x-2}$$

Eseguendo il passaggio al limite, si ricava:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\lim_{x\to 3}\left(A+\frac{B(x-3)}{x-2}\right)$$

ossia: $A = 6$.

Moltiplicando ora per $(x-2)$ ambo i membri si ricava:

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-2)}{x-3}+\frac{B(x-2)}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-3}=\frac{A(x-2)}{x-3}+B$$

Eseguendo il passaggio al limite, si ottiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-3}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{A(x-2)}{x-3}+B\right)$$

ossia: $B = -5$.

Si può ora procedere al calcolo dell'integrale:

$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}\right)dx=\int\frac{6}{x-3}dx-\int\frac{5}{x-2}dx$$

Si ottengono così due integrali che ammettono come primitive delle funzioni di tipo logaritmico.

II Metodo: Mediante il principio di identità dei polinomi.
Questo metodo permette di calcolare tutte le costanti A_1, A_2,…, A_k in blocco, senza ricorrere al calcolo di k limiti separatamente, ma mediante la risoluzione di un sistema lineare di k equazioni in k incognite.
Supponiamo che la funzione integranda si possa scrivere nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_k}{x-\alpha_k}$$

Si esegue la somma dei termini a secondo membro e si ricava:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1\left[(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\right]+A_2\left[(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)\right]+\ldots.}{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)}$$

È possibile eliminare i denominatori in quanto uguali. Si ottiene:

$$\begin{aligned}P(x)=\ &A_1\left[(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\right]+\\ &+A_2\left[(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)\right]+\\ &+\ldots+A_k\left[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{k-1})\right]\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi, si ottiene un sistema di k equazioni nelle k incognite A_1, A_2,…, A_k.

Esempio 2: Metodo alternativo per calcolare il valore dell'integrale presentato nell'esempio 1.
Si cercano le radici di $Q(x)$: (già calcolate nell'esempio 1)

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Quindi si cerca di soddisfare alla relazione:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Svolgendo la somma al secondo membro, e eliminando i denominatori si ottiene:

$$x + 3 = A(x-2) + B(x-3)$$

da cui, applicando il principio di identità dei polinomi, si costruisce il seguente sistema lineare di due equazioni nelle due incognite A e B:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -2+2B-3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=6 \\ B=-5 \end{cases}$$

Come era da aspettarsi, si ottengono gli stessi valori per le costanti A e B.
Una volta calcolati A e B, si può procedere al calcolo dell'integrale come nell'esempio 1.

1.3.2. *Radici complesse coniugate*

Come nel caso precedente si decompone il denominatore $Q(x)$ in fattori primi irriducibili, andando a cercare le radici del polinomio.
Il denominatore della frazione si può decomporre nel seguente modo:

$$Q(x) = k\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)..\left(x^2 + p_j x + q_j\right)$$

Il polinomio $Q(x)$ ammette, in tal caso, j radici complesse e le j radici complesse coniugate del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \\ \bar{x}_1 = \alpha_1 - i\beta_1 \end{cases} ; \dots ; \begin{cases} x_j = \alpha_j + i\beta_j \\ \bar{x}_j = \alpha_j - i\beta_j \end{cases}$$

La funzione integranda diventa si può scrivere nella forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = k\left[\frac{A_1 x + B_1}{\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)} + \dots + \frac{A_j x + B_j}{\left(x^2 + p_j x + q_j\right)}\right]$$

ove le A_h e B_h sono costanti reali da determinare utilizzando il principio di identità dei polinomi.
Si osservi che a numeratore appaiono polinomi di I grado e non più delle costanti come nel caso precedente.

Esempio 3: Calcolare il valore del seguente integrale: $\displaystyle\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx$

Le radici del polinomio a denominatore sono:

$$x_1 = 0; \; x_{2,3} = \pm i;$$

Cerchiamo di scrivere il rapporto nella forma:

$$\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Utilizzando il principio di identità dei polinomi, si ottiene:

$$x^2 + 3x + 2 = A(x^2 + 1) + x(Bx + C)$$

da cui:

$$x^2 + 3x + 2 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = (A + B)\, x^2 + Cx + A$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=3 \end{cases}$$

e quindi la funzione integranda si scrive:

$$\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{-x+3}{x^2+1} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}$$

Tornando all'integrale di partenza si ottiene:

$$\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{3dx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

Si ottengono così tre integrali facilmente calcolabili.

1.3.3. Radici dotate di molteplicità

Si decompone ancora in fattori primi il polinomio $Q(x)$ al denominatore. Si cercano le radici del polinomio:

$$Q(x) = k(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2} \ldots (x-\alpha_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1} \ldots \left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}$$

dove

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_j,\ m_1,\ m_2, \ldots,\ m_k$$

rappresentano gli "ordini di molteplicità" delle radici trovate (reali o complesse coniugate).
La funzione integranda si può riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}\right] + \left[\frac{A_{21}}{(x-\alpha_2)} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}}\right] +$$

$$+ \ldots + \left[\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \ldots + \frac{B_{1r_1}x+C_{1r_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}}\right] + \ldots$$

dove le varie costanti reali A_h, B_t, C_s vanno determinate mediante il principio di identità dei polinomi.

Esempio 4: Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

Le radici del polinomio al denominatore sono 3:

$x = 0$; e $x = 1$ con molteplicità 2

Cerchiamo una forma equivalente della funzione integranda:

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$

Le potenze del denominatore (x–1) si ripetono fino a raggiungere l'ordine di molteplicità.
Quindi:

$$1 = (A + B)\, x^2 + (-2A-B + C)\, x + A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=0 \\ C-2A-B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

quindi l'integrale si può riscrivere nel seguente modo

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

Esempio 5: Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx$

È gr($Q(x)$) > gr($P(x)$).
Per decomporre tale frazione bisogna determinare le radici del polinomio al denominatore

$$4x^5+4x^3+x=0 \quad \Rightarrow \quad x(4x^4+4x^2+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x(2x^2+1)^2=0$$

Le radici sono :

$$x=0\ ;\ \text{e} \quad x=\pm\frac{i\sqrt{2}}{2} \quad \text{ognuna con ordine di molteplicità 2}$$

⇨ si hanno 4 radici complesse e 1 radice reale.
Per il teorema di decomposizione dei polinomi la funzione integranda si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{2x^2+1}+\frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+2=A(2x^2+1)^2+(Bx+C)x(2x^2+1)+(Dx+E)x$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+2=(4A+2B)\,x^4+2Cx^3+(4A+B+D)\,x^2+(C+E)\,x+A$$

da cui si ricava il sistema lineare nelle incognite A, B, C, D, E:

$$\begin{cases} 4A+2B=0 \\ 2C=0 \\ 4A+B+D=1 \\ C+E=0 \\ A=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=2 \\ B=-4 \\ C=0 \\ D=-3 \\ E=0 \end{cases}$$

Quindi la frazione si può scrivere come somma di frazioni, nel modo seguente:

$$\frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}=\frac{2}{x}-\frac{4x}{2x^2+1}-\frac{3x}{(2x^2+1)^2}$$

1.4. Teorema di decomposizione dei polinomi

N.B. La tecnica di decomposizione dei polinomi non è finalizzata all'integrazione, ma può essere usata ogni volta che si ha a che fare con il quoziente di due polinomi che rispettino le ipotesi esposte.

Siano $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi reali con coefficienti reali e tali che

$$gr(P(x)) < gr(Q(x)).$$

Se il polinomio $Q(x)$ si può fattorizzare nel seguente modo:

$$Q(x) = k(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}\dots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{r_j}$$

risulta che :

- $r_1, r_2, \dots, r_j, m_1, m_2, \dots, m_k$ sono gli ordini di molteplicità delle radici del polinomio $Q(x)$.
- $m_1 + m_2 + \dots + m_k + 2(r_1 + r_2 + \dots + r_j) = \text{gr}(Q(x))$.
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sono le radici reali dell'equazione $Q(x)=0$
- $x^2 + p_1x + q_1, \dots, x^2 + p_jx + q_j$ sono polinomi di secondo grado irriducibili nel campo reale, ossia ammettono due radici complesse coniugate.

Il rapporto $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ si può esprimere come somma di frazioni parziali nel seguente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\left[\frac{A_{h1}}{(x-\alpha_h)} + \frac{A_{h2}}{(x-\alpha_h)^2} + \dots + \frac{A_{hm_h}}{(x-\alpha_h)^{m_h}}\right]}_{\text{per ogni radice reale}} + \dots + $$

$$+ \underbrace{\left[\frac{B_{k1}x + C_{k1}}{x^2+p_kx+q_k} + \frac{B_{k2}x + C_{k2}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^2} + \dots + \frac{B_{kr_k}x + C_{kr_k}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{r_k}}\right]}_{\text{per ogni coppia di radici complesse coniugate}}$$

ove le costanti reali A, B, C si determinano mediante il principio di identità dei polinomi.

Esempio. Calcolare la primitiva del seguente integrale: $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$.

Siccome $\text{gr}(x^2 + 2)=2$ e $\text{gr}[x^2(x^2 + 1)^2] = 6$, siamo nelle condizioni di poter applicare il teorema precedente.

I passo. Calcolo delle radici di $x^2(x^2 + 1)^2 = 0$. Si ricava:

- $x_1 = 0$ con molteplicità 2,
- $x_2 = i$ con molteplicità 2,
- $x_3 = -i$ con molteplicità 2.

II passo. Cerchiamo di scrivere la funzione integranda nella seguente forma:

$$\frac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}}_{\substack{\text{parte}\\ \text{corrispondente}\\ \text{alle radici reali}}} + \underbrace{\frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}}_{\substack{\text{parte corrispondente}\\ \text{alle radici complesse}\\ \text{coniugate}}}$$

$$\frac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{Ax(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+x^2(Cx+D)(x^2+1)+(Ex+F)x^2}{x^2(x^2+1)^2}$$

III passo: uguaglianza tra i numeratori;

$$x^2+2=x^5(A+C)+x^4(B+D)+x^3(2A+C+E)+x^2(2B+D+F)+Ax+B$$

IV passo: per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 2A+C+E=0 \\ 2B+D+F=1 \\ A=0 \\ B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=0 \\ D=-2 \\ E=0 \\ F=-1 \end{cases}$$

quindi la funzione integranda si può scrivere nella forma:

$$\frac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

pertanto l'integrale di partenza diviene:

$$\int\frac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2}dx=\int\frac{2dx}{x^2}-\int\frac{2dx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

I primi due integrali sono facilmente calcolabili e corrispondono rispettivamente alle funzioni $-\frac{2}{x}$ e $-2\operatorname{arctg} x$, mentre per il terzo integrale bisogna dapprima ricorrere al metodo di sostituzione e poi all'integrazione per parti, infatti posto $x = \operatorname{tg} u$ si ricava $dx=\frac{du}{\cos^2 u}$ per cui:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \int\cos^2 u\,du=\int\cos u\; d(\operatorname{sen} u)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}u\cos u+\frac{u}{2}$$

da cui si può tornare alla vecchia variabile per avere l'integrale in funzione della variabile x.