Esercizi 26/10/2007

1 Distanza di un punto da una retta (nel piano)

Sia

$$r = \{ax + by + c = 0\}$$

una retta. Sia $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ un punto che non sta sulla retta r. Vogliamo vedere se si può parlare di distanza tra il punto P e la retta r. Abbiamo definito geometricamente il concetto di distanza tra due punti: possiamo quindi calcolare la distanza tra P e uno qualsiasi dei punti di r. In particolare, tale distanza, se $Q = (q_1, q_2)$ sta su r, è uguale a

$$d(Q) = d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$$

Possiamo considerare $d(Q) = d(q_1, q_2)$ come una funzione nelle due variabili q_1 e q_2. Dalla geometria ricaviamo l'intuizione che $d(Q)$ assuma per un particolare $\overline{Q}$ su r un valore più piccolo di tutti gli altri: tale $\overline{Q}$ è il punto di intersezione tra r e la retta r' perpendicolare a r e passante per P. Calcoliamo le coordinate di $\overline{Q}$: scriviamo r' come luogo di zeri. Dall'equazione che definisce r ricaviamo che r è parallela alla retta passante per l'origine e perpendicolare al vettore (a, b). La retta r' sarà quindi parallela alla vettore (a, b) e passante per P. Abbiamo

$$r' = \{-b(x - p_1) + a(y - p_2) = 0\}$$

Il punto di intersezione $\overline{Q} = (\overline{q_1}, \overline{q_2})$ è quindi dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -b(x - p_1) + a(y - p_2) = 0 \end{cases}$$

Si può effettivamente dimostrare che l'insieme

$$\{d(Q) \,|\, Q \text{ giace su } r\}$$

ammette un minimo e che questo minimo è $d(\overline{Q})$. Inoltre, per ogni altro punto $Q \neq \overline{Q}$ di r si ha

$$d(\overline{Q}) < d(Q)$$

Diremo allora che la distanza di P da r è $d(\overline{Q})$. Se P è un punto che appartiene alla retta r, diremo invece che P dista 0 da r.

- Trovare la distanza tra la retta parallela a $(-1, 1)$ e passante per $(0, 1)$ e il punto $(-2, -2)$.
- Trovare la distanza tra la retta parallela a $(0, 1)$ e passante per $(-2, 6)$ e il punto $(3, 5)$.

2 Rototraslazioni e riflessioni nel piano

- Rotazioni.
  Fissato l'ampiezza di un certo angolo α vogliamo definire una regola R_α che ad ogni $(x,\, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ associ un nuovo elemento $R_\alpha(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ che scriviamo

  $$R_\alpha(x,\, y) = (R_\alpha(x,\, y)_x,\, R_\alpha(x,\, y)_y)$$

  in modo che $R_\alpha(x,\, y)$ rimanga alla stessa distanza dal centro $(0,\, 0)$ di $(x,\, y)$ ma ruotato rispetto alla direzione individuata da $(x,\, y)$ di un angolo di ampiezza α. Per definire R_α procediamo come segue: chiamiamo β l'ampiezza dell'angolo che $(x,\, y)$ individua rispetto all'asse delle ascisse (cioè l'asse $y = 0$). Allora

  $$x = d\cos\beta \quad \text{e} \quad y = d\sin\beta$$

  dove $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza di $(x,\, y)$ da $(0,\, 0)$. Le coordinate del punto $R_\alpha(x,\, y)$ corrispondono a quelle del punto che giace sul cerchio di centro $(0,\, 0)$ e raggio d ruotato di un angolo α rispetto alla direzione individuata da $(x,\, y)$ e quindi di un angolo di ampiezza $\alpha + \beta$. Come prima allora

  $$R_\alpha(x,\, y)_x = d\cos(\alpha + \beta) \quad \text{e} \quad R_\alpha(x,\, y)_y = d\sin(\alpha + \beta)$$

  Utilizzando le formule di addizione per seno e coseno e le uguaglianze $\cos\beta = x/d$ e $\sin\beta = y/d$, otteniamo

  $$R_\alpha(x,\, y)_x = x\cos\alpha - y\sin\alpha \quad \text{e} \quad R_\alpha(x,\, y)_y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

  Quindi

  $$R_\alpha(x,\, y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

  Osserviamo che possiamo scrivere più comodamente questa regola in forma di matrice, precisamente la matrice

  $$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

  Infatti in questo modo risulta

  $$R_\alpha(x,\, y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Osserviamo che da questa scrittura è chiaro che R_α è un'applicazione lineare. Diremo che la matrice M_α rappresenta R_α e che R_α è la rotazione di angolo α.

• L'applicazione $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?

• Per quali valori di α la matrice M_α è invertibile? Per i valori di α per cui M_α è invertibile scrivere l'inversa di M_α.

• È vero che $R_{\alpha_1} R_{\alpha_2} = R_{\alpha_2} R_{\alpha_1}$ per qualsiasi coppia di angoli (α_1, α_2)?

• Per quali valori di α si ha $R_\alpha = {}^t R_\alpha$?

- Traslazioni.
Vogliamo adesso, fissato un vettore $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, definire una regola T_v che ad ogni $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ associ un nuovo elemento $T_v(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che scriviamo

$$T_v(x, y) = ((T_v)_x(x, y), (T_v)_y(x, y))$$

in modo che $T_v(x, y)$ sia ottenuto spostando (x, y) del vettore v. Osserviamo cosa accade alle coordinate di (x, y) quando procediamo alla traslazione: l'ascissa verrà spostata di v_1 mentre l'ordinata di v_2. Quindi

$$(T_v)_x(x, y) = x + v_1 \quad \text{e} \quad (T_v)_y(x, y) = y + v_2$$

Quindi

$$T_v(x, y) = (x + v_1, y + v_2)$$

che possiamo anche scrivere come

$$T_v(x, y) = (x, y) + v$$

• Per quali vettori v, T_v è un'applicazione lineare?

• Come si definisce un'applicazione che associ a (x, y) il vettore che è il traslato del vettore $v = (v_1, v_2)$ che è ottenuto ruotando di α il vettore (x, y)?

• Come si definisce un'applicazione che associ a (x, y) il vettore che è il ruotato di un angolo α del vettore che è ottenuto traslando di $v = (v_1, v_2)$ il vettore (x, y)?

- Riflessioni.
Sia r la retta parallela al vettore $v = (v_1, v_2)$ e passante per il punto $P = (p_1, p_2)$. Vogliamo definire un'applicazione S_r che associ al punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ il punto $S_r(x, y)$ che giace sulla retta perpendicolare a r e passante per (x, y), la cui distanza da r è pari a quella tra r e (x, y), in modo che $S_r(x, y)$ giaccia sul semipiano opposto a quello in cui giace (x, y). Diremo che $S_r(x, y)$ è il riflesso di (x, y) rispetto alla retta r (se

(x, y) sta su r diremo che il riflesso di (x, y) è (x, y)). Per definire S_r ragioniamo come segue. Supponiamo dapprima che $a = c = 0$ quindi r è l'asse delle ascisse. Allora

$$S_{y=0}(x, y) = (x, -y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nel caso generale effettuiamo una rototraslazione L che porti la retta r nell'asse delle ascisse. Tale trasformazione sarà definita da

$$R[(x, y) - P]$$

R è la rotazione di angolo $-\alpha$ dove α è l'angolo la cui tangente è v_2/v_1 (se $v_1 = 0$ e $v_2 > 0$, $\alpha = \pi/2$, se $v_1 = 0$ e $v_2 < 0$, $\alpha = 3\pi/2$). Quindi

$$S_r(x, y) = R^{-1} S_{y=0} R[(x, y) - P] + P$$

Diremo che S_r è la riflessione rispetto alla retta r.

- $S_{y=0}$ è uguale a R_α per qualche α?
- Per quali angoli α si ha $R_\alpha S_{y=0} = S_{y=0} R_\alpha$?
- Supponiamo che $P = 0$ ossia che la retta r passi per l'origine. L'applicazione $S_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?
- Scrivere la riflessione rispetto alla retta $3x + y = 0$.

3 Coordinate polari nel piano

In alcune situazioni, tipicamente quelle che coinvolgono rotazioni ed espansioni, al posto delle solite coordinate cartesiane è più comodo utilizzare quelle che si chiamano coordinate polari. Osserviamo che un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è individuato dalla sua distanza dal centro e dall'angolo che il vettore (x, y) forma con l'asse $y = 0$ (angolo che possiamo considerare compreso tra $-\pi$ e π). Quindi si può definire una funzione nel seguente modo

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)) & \text{se } x > 0 \\ (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi) & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi) & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0 \\ (y, \pi/2) & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ (y, -\pi/2) & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

Essa risulta definita per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ ed è iniettiva; la sua immagine è $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$. Supponiamo di volere definire la trasformazione inversa: di avere cioè delle coordinate (ρ, θ) e di voler individuare il punto (x, y) tale che

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Utilizzando le defінzioni di seno e coseno otteniamo che

$$x = \rho \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho \sin\theta$$

• Scrivere l'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ in coordinate polari.

4 Coordinate sferiche e cilindriche nello spazio tridimensionale

- Nello spazio tridimensionale, un punto (x, y, z) è identificato da tre coordinate (dette cilindriche): la sua distanza ρ dal centro, l'angolo θ che $(x, y, 0)$ forma con l'asse $y = z = 0$ e la sua distanza h dal piano $z = 0$. Dato un punto (ρ, θ, z) in coordinate cilindriche, deduciamo le sue coordinate cartesiane nel seguente modo

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad z = h$$

- Nello spazio tridimensionale, un punto (x, y, z) è identificato da tre coordinate (dette sferiche): la sua distanza ρ dal centro, l'angolo θ che $(x, y, 0)$ forma con l'asse $y = z = 0$ e l'angolo ϕ tra il vettore individuato da (x, y, z) e quello individuato da $(0, 0, 1)$. Dato un punto (ρ, θ, ϕ) in coordinate cilindriche, deduciamo le sue coordinate cartesiane nel seguente modo

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \cos\phi$$