Esercizi 11/1/2008

1 Equazioni differenziali

- Equazioni del primo ordine a variabili separabili.
  Trovare $y(t)$ tale che
  $$y'(t) = e^t \sqrt{y(t) + 1/2}$$
  e $y(0) = -1/4$. Una soluzione è
  $$y(t) = \frac{e^{2t}}{4} - \frac{1}{2}$$

- Equazioni lineari del secondo ordine.
  Trovare tutte le funzioni $y(t)$ che soddisfano l'equazione
  $$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = e^{3t}(t^2 + 1)$$
  Sia V lo spazio vettoriale reale bidimensionale definito da
  $$V = \{a \cos t + b \sin t \,|\, a, \mathbb{R}\}$$
  Gli elementi di tale spazio sono dunque delle particolari funzioni trigonometriche: per definzione stessa di V, una sua base è $\{\cos t, \sin t\}$. Sia $D : V \to V$ definito da
  $$D(v(t)) = v''(t) - 4v'(t) + 5v(t)$$
  Provare che D non ha alcun autovalore (reale). Osservare prima di tutto che
  $$D(\cos t) = 4 \cos t + 4 \sin t \qquad D(\sin t) = -4 \cos t + 4 \sin t$$
  quindi una matrice che rappresenta D secondo la base $\{\cos t, \sin t\}$ è
  $$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$
  Il polinomio caratteristico di tale matrice non ha radici reali, quindi D non ha autovalori. Allora

2 Ancora su estremi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \log(1 + \frac{3}{n}) - \frac{n}{2},\, n \in \mathbb{N}\}$$

Osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{3}{n} \geq 1 + \frac{3}{n+1}$$

ed essendo log una funzione crescente si ha quindi

$$\log(1 + \frac{3}{n}) \geq \log(1 + \frac{3}{n+1})$$

Di conseguenza

$$\log(1 + \frac{3}{n}) - \frac{n}{2} \geq \log(1 + \frac{3}{n}) - \frac{n+1}{2}$$

e quindi A ammette massimo e tale massimo è raggiunto per $n = 0$. Verifichiamo ora che $\inf A = -\infty$. Per farlo dobbiamo dimostrare che

$$\forall N \geq 0 \exists x_N \in A \quad \text{tale che} \quad x_N \leq -N$$

Osserviamo che

$$\log(1 + \frac{3}{n}) - \frac{n}{2} \leq \log 4 - \frac{n}{2}$$

Inoltre

$$\log 4 - \frac{n}{2} \leq -N \Leftrightarrow n \geq 2N + 2 \log 4$$

Quindi dato N, scegliamo $x_N = \log(1 + \frac{3}{n}) - \frac{n}{2}$ con $n \geq 2N + 2\log 4$. Si avrà allora $x_N \leq -N$ che era quanto volevamo. Un altro modo per provare la stessa affermazione è studiare la funzione

$$f(x) = \log(1 + \frac{3}{x}) - \frac{x}{2}$$

osservando che se x tende a $+\infty$ allora $f(x)$ tende a $-\infty$.

3 Ancora su studi e integrali di funzioni di una variabile reale

- Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

e calcolare

$$\int_0^{5/6} f(x)dx$$

indicando graficamente la porzione di piano di cui tale valore è l'area.
Si osserva subito che $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ e $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$. Il dominio di f è dunque $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$. Inoltre

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3/2 \qquad \lim_{x\to 2^\pm} = \mp\infty \qquad \lim_{x\to 3^\pm} = \pm\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

Dunque ci sono due asintoti verticali (per $x = 2$ e $x = 3$) e un asintoto orizzontale ($y = 1$). Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ si ha

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

Possiamo dunque studiare quest'ultima funzione. Osserviamo che

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \quad \text{oppure} \quad x \geq 3$$

e $x^2 + x + 1 \geq 0$ per ogni x nel dominio. Quindi $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq 2$ oppure $x \geq 3$. In particolare se $x \leq 2$ oppure $x \geq 3$, si ha

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \geq x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow 6x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 5/6$$

In particolare $f(x)$ tende all'asintoto $y = 1$ per valori più piccoli di 1 se $x \to -\infty$ e per valori più grandi di 1 se $x \to +\infty$.
Si vede subito che

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 10x + 11}{x^2 - 5x + 6}$$

Il numeratore di $f(x)$ ha due radici reali, α_1 che è compresa tra 2 e 3 e α_2 che è minore di 0. Si vede quindi subito che $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, \alpha_2) \cup (\alpha_1, 3) \cup (3, +\infty)$, crescente in $(\alpha_2, 2)$ e $(2, \alpha_1)$. Quindi α_1 e α_2 sono punti di minimo locale. Ciò si può verificare anche calcolando la derivata seconda di f, che è utile anche per scoprire che c'è un punto di flesso (per un certo α_3 minore di α_2).
Per quanto riguarda l'integrale, si osserva subito che

$$x^2 + x + 1 = (x^2 - 5x + 6) + (6x - 5)$$

quindi

$$\int_0^{5/6} f(x)dx = \int_0^{5/6} dx + \int_0^{5/6} \frac{6x-5}{x^2 - 5x + 6} dx = 5/6 + \int_0^{5/6} \frac{6x-5}{x^2 - 5x + 6}$$

Si ha poi

con $A = -7$ e $B = 13$. Quindi

$$\int_0^{5/6} f(x)dx = 5/6 + \log(7/12) + \log(13/18)$$

Tale valore è uguale all'area della porzione di piano delimitata dall'asse x, dall'asse y, dalla retta $x = 5/6$ e sottostante il grafico di f.