Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

IX foglio di esercizi: M. Novaga, V.M. Tortorelli

Fuori programma

Materiale relativo al corso si reperisce in rete: http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html

---

ESERCIZIO n. 1 Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$u' + 2u = 4x,\ u' + u = \cos x,\ u' + au = e^{mx},\ u' - u\sin x = \sin 2x\ ,\ \ u' + 2xu = xe^{-x^2},$$

$$u' + \frac{1-2x}{x^2}u = 1\ (x > 0)\ ,\ \ u' - u = \frac{(1+x^2)e^x}{x}\ (x < 0)\ ,\ \ u' - \frac{2xu}{1+x^2} = 1 + x^2\ ,$$

$$u' + \frac{2}{x}u = \frac{\sin x}{x}\ (x \neq 0)\ ,\ \ u' + \frac{nu}{x+1} = e^x(x+1)^n\ (n \in \mathbf{N}),$$

$$xu' = 1\ ,\ \ xu' + 2u = \sin x\ ,\ \ x(u' - u) = (1+x^2)e^x\ ,\ \ (x+1)u' - nu = e^x(x+1)^{n+1}.$$

ESERCIZIO n. 2 Data un'equazione differenziale $u' = f(x, u)$ l'eventuale inversa di una soluzione dovrebbe verificare l'equazione $x' = \frac{1}{f(x,u)}$. Tracciare i grafici approssimativi delle soluzioni dei seguenti problemi riducendosi ad equazioni lineari:

$$u' = \frac{1}{2x-u}\ ,\ \ u(1) = 1\ ;\ \ \ u' = \frac{1}{2x-u^2}\ ,\ u(1) = -1\ ;\ \ u' = \frac{1}{x+e^u}\ ,\ \ u(0) = 3\ ;$$

ESERCIZIO n. 3

a) Un massa puntiforme di grandezza m, in quiete all'istante iniziale t_0, si muove di moto rettilineo soggetta ad una forza proporzionale, per un fattore κ, all'incremento di tempo dall'istante iniziale, ed ad una forza di resistenza del mezzo porporzionale, per un fattore χ, alla velocità. Si espliciti la velocità in funzione del tempo e dei parametri.

b) Un corpo ad un instante t_0 ha temperatura pari a quella dell'ambiente circostante eguale a Θ_0. Il corpo viene riscaldato a tasso costante, pari a δ^2, e disperde calore nell'ambiente in modo proporzionale, per un fattore γ^2, alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente considerata costante. Si espliciti la dipendenza dal tempo della temperatura del corpo.

ESERCIZIO n. 4 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$u' = \frac{1-2x}{y^2}\ ,\ \ xu' + u = u^2\ \ (x > 0)\ ,\ \ u' + \sqrt{\frac{1-u^2}{1-x^2}} = 0\ ,\ \ u' = \frac{1+y^2}{1+x^2}\ ,\ \ u' = 100^{x+u}.$$

ESERCIZIO n. 5 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali per *sostituzione*:

$$u' = 3 + \cos(x - u)\ ,\ \ u' = \frac{u+x-1}{(x+u)^2+1}\ ,\ \ u' = \frac{6x + \frac{u}{x}}{2 - \log x}\ ,\ \ u' = -\frac{e^x \cos u + 3u}{3x - e^x \sin u}.$$

(*) ESERCIZIO n.6 Trovare un grafico per cui la distanza dall'origine di ogni retta tangente ad un suo punto è uguale alla distanza dall'origine della retta normale nello stesso punto.

ESERCIZIO n. 7 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:

$$u'' = x + \sin x,\ u'' = \mathrm{artan} x,\ u'' = u' + x,\ u'' = \frac{u'}{x} + x,\ (u'')^2 = u',\ 2xu'u'' = (u')^2 + 1,$$

$$u'' = u,\ u'' = u^{13},\ u'' = 2uu',\ u''u + (u')^2 = x,\ u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = 0,\ u'' + u',\ u'' = \frac{u'(e^u - 1)}{x},$$

$$u'' = \frac{u}{1 + (u')^2}.$$

ESERCIZIO n. 8 Si trovino le soluzioni dei seguenti problemi ai dat iniziali:

$u'' = \dfrac{2xu'}{1+x^2}$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 3$; $u'' = \dfrac{u'}{x} + \dfrac{x}{u'}$, $u(1) = 1$, $u'(1) = 1$;
$u'' = xu' + u + 1$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$.

ESERCIZIO n.9 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a cofficienti costanti o la soluzione dei problemi ai dati iniziali:
$u'' - 2u' + u = 0$, $u(1) = 0$, $u'(1) = e$; $u'' - 3u' + 2u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$; (Faedo-Modica)
$u'' + u' - 2u = 0$; $4u'' - 20u' + 25u = 0$; $u'' - 4u' + 3u = 0$, $u(0) = 6$, $u'(0) = 10$. (Berman)

ESERCIZIO n.10 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a cofficienti costanti o la soluzione dei problemi con dati iniziali o al bordo:
$u'' - 3u' + 2u = x^2$; $u'' + 2u' + 10u = x^3 - 1$; $2u'' + u' - u = 2e^x$; $u'' + 2u' + 5u = \sin x$;
$u'' - 3u' + 2u = f(x)$ nei seguenti casi:
$10e^{-x}$, $3e^{2x}$, $2\sin x$, $2x^3 - 30$, $3x + 5\sin 2x$, $2e^x - e^{-2x}$, $\sinh x$;
$u'' + u = \dfrac{1}{\cos x}$;
$u'' + u = \sin 2x$, $x \in [0;\pi]$, $u(0) = u(\pi) = 0$.

ESERCIZIO n.11 Se $y \not\equiv 0$ è soluzione di: $u''(x) + u'(x)f(x) + u(x)g(x) = 0$, allora

$$z(x) \ = cy(x) \int^x \frac{e^{-\int^t f(s)ds}}{y^2(t)} dt$$

è soluzione della stessa.

ESERCIZIO n.12 Si trovino le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$u'' - \tan x \cdot u' + 2u = 0, \ u'' - u' + \frac{y}{x} = 0.$$

(*) ESERCIZIO n.13 Si trovino tutte le soluzioni $(u;\lambda)$, ove le incognite sono: u funzione definita su $[0;\pi]$, e λ numero reale, dei problemi:

$u'' = \lambda \cdot u$, $u(0) = u(\pi) = 0$; $u'' = \lambda \cdot u$, $u(0) = u(\pi)$;
$u'' = \lambda \cdot u$, $u(0) = u(\pi)$, $u'(0) = u'(\pi)$; $u'' = \lambda \cdot u$, $u(0) = u(\pi) = u'(0) = u'(\pi) = 0$.
