Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

III foglio di esercizi

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso si reperiscono in rete: http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html selezionando il nome del corso.

DEFINIZIONE: si dice *segmento* tra due punti P e Q dello spazio o del piano l'insieme dei punti del tipo $P + t(Q - P) + = (1 - t)P + tQ$ al variare di t tra 0 ed 1 compresi. Nel caso in cui si vogliano escludere gli estremi si dovranno escludere i rispettivi estremi del dominio ove varia il parametro t.

ESERCIZIO n. 1 - Si scriva in forma parametrica il segmento parallelo al vettore dall'origine a $(1, 2, 3)$, passante per $(4, 5, 6)$ e lungo 14.
- Si scriva in forma parametrica il triangolo di vertici $(1, 2, 3)$, $(4, 6, 8)$, $(5, 7, 9)$.
- Si trovino due numeri reali a, b per cui $(1, 2) = a(1, 1) + b(2, 1)$. Si mostri che sono unici.

ESERCIZIO n. 2 Si provi che le rette $X = P + tQ$, $t \in \mathbf{R}$ e $X = A + sB$, $s \in \mathbf{R}$ sono parallele se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$, non nullo, tale che $Q = \lambda B$.

OSSERVAZIONE
Prodotto scalare Assumendo l'invarianza della misura "per rotazioni", dalle formula di addizione per le funzioni trigonometriche, indicando con $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza dall'origine O del punto di coordinate (x, y), dati due punti P e Q nel piano (di coordinate rispettivamente (a, b) e (α, β)) si ha:

$a \cdot \alpha + b \cdot \beta = |P||Q| \cos \theta$ ove θ è la misura in radianti dell'angolo POQ.

Del tutto analogamente dati due punti nello spazio di coordinate (a, b, c) e (α, β, γ) si ha

$a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma = |P||Q| \cos \theta$

ove qui $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e θ è la misura dell'angolo POQ nel piano POQ.
DEFINIZIONE: dati due vettori P e Q nel piano (o nello spazio) la *somma dei prodotti delle coordinate di egual posto* si dice prodotto scalare tra i due vettori. Esso si indica con $(P \cdot Q)$ o $P \bullet Q$. Quindi $P \bullet P = |P|^2$. Si ha la diseguaglianza notevole: $-|P| \cdot |Q| \leq P \bullet Q \leq |P| \cdot |Q|$. L'equazione come luogo di zeri che individua una retta nel piano ovvero un piano nello spazio non dice altro che si considerano i punti (x, y, z) che hanno un prodotto scalare di valore costante d con un vettore prefissato (a, b, c): $ax + by + cz = d$. Semipiani e semispazi vengo invece individuati dalle relative diseguaglianze.

ESERCIZIO n. 3 - Determinare l'equazione della retta passante per $(2, -1)$ e perpendicolare alla retta di equazione $4x - 3y + 12 = 0$.
-Determinare la retta passante per $(0, 0)$ e per il centro di $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.
- Si calcoli la distanza del punto $(-3, 2)$ dalla retta di equazione $4x - 3y + 12 = 0$.
- Si calcoli la distanza del punto $(-3, 2, -1)$ dal piano di equazione $4x - 3y + 2z - 12 = 0$.
- Si determini come luogo di zeri il piano parallelo ai vettori dall'origine a $(1, 2, 3)$ e $(4, 5, 6)$ e passante per $(7, 8, 9)$.
- Si determini come luogo di zeri il piano passante per $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ e $(7, 8, 9)$.

ESERCIZIO n. 4 - Verificare che gli insiemi $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$, $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ sono quadrati; determinarne i vertici e le lunghezze dei lati.
- Che poliedri individuano gli insiemi $\{(x,y,z) : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1, \ |z| \leq 1\}$, $\{(x,y,z) : |x| + |y| + |z| \leq 1\}$. Qual'è la distanza dall'origine delle facce del secondo?

ESERCIZIO n. 5 - Si suddivida il segmento di estremi $(1,2)$ e $(2,1)$ in quattro parti di egual lunghezza mediante i tre punti P, Q, R. Si calcolino le coordinate di tali punti.
- Dati $P = (-2,5)$ e $Q = (4,13)$, trovare le coordinate di un punto R sul segmento PQ tale che $|P - R| = 2\ |Q - R|$.
- Se $R = (2,3,2)$ è punto medio del segmento PQ e $P = (7,5,6)$, trovare le coordinate di Q.

ESERCIZIO n. 6 Dimostrare che per ogni $P, \ Q$ si ha $|P - Q|^2 = |P|^2 + |Q|^2 - 2\ P \bullet Q$.

ESERCIZIO n. 7 - Provare che il triangolo di vertici $(2,-1)$, $(4,2)$ e $(5,1)$ è isoscele.
- Provare che il triangolo di vertici $(-3,3)$, $(-1,3)$ e $(11,-1)$ è rettangolo.
- Calcolare la lunghezza della mediana uscente dal punto A relativa al triangolo ABC, ove $A = (-1,1)$, $B = (0,-6)$, $C = (-10,-2)$.
- Scrivere l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti da $(0,2)$ e $(2,1)$.
- Scrivere l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dai punti $(0,2,1)$ e $(2,1,3)$.

ESERCIZIO n.8 - Si provi che le rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$.

ESERCIZIO n. 9 (determinante)- Si calcoli l'area del triangolo di vertici $(1,2)$, $(6,7)$, $(-1,3)$.
- Si calcoli il volume del parallelepipedo nello spazio di vertici $(1,1,1)$, $(2,2,3)$, $(3,2,2)$, $(2,3,2)$, $(5,5,5)$.
- Si determini l'area del triangolo con vertici l'origine, $(1,1,1)$ e la proiezione ortogonale di questo sul piano per l'origine e i punti $(1,2,2)$, $(2,2,1)$.

ESERCIZIO n. 10 - Si provi che i quattro punti $(1,1,1)$, $(3,2,2)$, $(2,3,2)$, $(4,4,3)$ giacciono su uno stesso piano.
- Si calcolino le aree dei tre parallelogrammi ottenuti proiettando ortogonalmente sui piani coordinati il parallelogramma, nello spazio, di vertici $(1,1,1)$, $(3,2,2)$, $(2,3,2)$, $(4,4,3)$.
- Si verifichi che la radice quadrata della somma dei quadrati delle precedenti aree è eguale all'area del parallelogramma nello spazio.

ESERCIZIO n. 11 - Si provi che due vettori, (a,b) e (α,β), sono uno multiplo dell'altro se e solo se $a\beta - b\alpha = 0$.
- Dimostrare che il sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$ per ogni dato (c,γ) è risolubile univocamente se e solo se risulta $a\beta - b\alpha \neq 0$; in tal caso se ne scriva la soluzione (x,y).

ESERCIZIO n. 12 - Si trovino le soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 13 - Due vettori nello spazio sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro

prodotto vettore è nullo.
- Si verifichi che dati due vettori nello spazio (α,β,γ) e (A,B,C) il vettore individuato dalla terna $(det((\beta,\gamma),(B,C)),-det((\alpha,\gamma),(A,C)),det((\alpha,\beta),(A,B)))$ è ortogonale ai due vettori.
- Si deduca dal precedente punto che tre vettori nello spazio stanno sullo stesso piano passante per l'origine se e solo se il determinante delle loro coordinate è nullo.
- Si provi che il sistema $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ Ax+By+Cz=D \end{cases}$ ha un'unica soluzione per ogni dato (d,δ,D) se e solo se $det((a,b,c),(\alpha,\beta,\gamma),(A,B,C))\neq 0$.
- Per quali dati(d,δ,D) è risolubile se invece il determinante è nullo?
- Si provi che le rette $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ sono perpendicolari se e solo se esiste $\lambda\in\mathbf{R}$ tale che $\lambda a=-b'$, $\lambda b=a'$.
- Si provi che: le rette $X=P+tQ$, $t\in\mathbf{R}$, e $ax+by+c=0$ sono perpendicolari se e solo se i vettori Q e (a,b) sono proporzionali; parallele se e solo se Q e $(b,-a)$ sono proporzionali.

DEFINIZIONE: un sottoinsieme C dello spazio si dice *convesso* se per ogni coppia di suoi punti contine tutto il segmento tra essi compreso ($t\in[0;1],\ P,\ Q\in C\ \Rightarrow(1-t)P+tQ\in C$). Si osserva che l'intersezione di una famiglia di convessi è un convesso.

ESERCIZIO n. 14 - Si provi che un $[0;1]$, $\{(x,y): x=3y+1\}$, $\{(x,y): y\leq\sqrt{2}x-6\}$, $\{(x,y,z): z=3\}$, $\{(x,y,z): x-y\leq z\}$ sono convessi.
- Si provi che $\{(x,y): y\geq|x|\}$, $\{(x,y): y\geq x^2\}$, $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ sono convessi.

DEFINIZONE: dati n punti P_1, ..., P_n si *dice combinazione baricentrica* o *media pesata* di essi un qualsiasi punto del tipo $m_1P_1+\dots m_nP_n$, ove $m_1+\dots m_n=1$, $0\leq m_1,\ \dots m_n\leq 1$. I numeri $m_1,\ \dots m_n$ si diranno anche pesi della combinazione.
DEFINIZIONE: dato un insieme A si dice *inviluppo convesso di* A l'insieme dei punti che si ottengo con combinazioni baricentriche di elementi di A.
PROPOSIZIONE: Per un sottoinsieme A del piano l'inviluppo convesso si ottiene con medie pesate di terne di punti di A. Nello spazio di quaterne.

ESERCIZIO n. 15 Trovare le coordinate del baricentro (definito come punto di incontro delle mediane) di un triangolo conoscendo le coordinate dei suoi tre vertici.

ESERCIZIO n. 16 - Si esprima il triangolo ottenuto dall' intersezione dei sempipiani $x\geq 1$, $y\geq 1$, $y\leq -2x+3$ come inviluppo convesso di tre punti.
- Mostrare che in generale l'inviluppo convesso di un insieme A non è eguale all'intersezione dei semipiani, che contengono ognuno la retta che lo individua, e che contengono A.

ESERCIZIO n. 17 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (in termini delle coordinate (x,y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni affini del piano o dello spazio:
- simmetria rispetto al punto $(1,2)$
- simmetria rispetto alla generica retta passante per l'origine
- simmetria rispetto alla retta passante per $(2,3)$ e parallela a $(3,4)$
- rotazione antioraria di un sesto di 'angolo giro' attorno all'origine
- rotazione antioraria di un ottavo di 'angolo giro' attorno al punto $(4,5)$
- simmetria rispetto al punto $(1,2,3)$
- simmetria rispetto al piano $x-y+z=0$

- simmetria rispetto al piano $x-y+z=3$
- rotazione antioraria di un angolo retto attorno all'asse verticale $(0,0,1)$
- rotazione di un angolo retto attorno all'asse orientato positivamente dall'origine a $(1,1,1)$ in senso antiorario.

ESERCIZIO n. 18 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e in termini delle coordinate (x,y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni affini dal piano o dello spazio: la dilatazione di centro $(1,1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$; la dilatazione anisotropa di centro $(1,1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$ nella direzione $(1,2)$ e fattore 2 nella direzione $(2,1)$. dilatazione anisotropa di centro l'origine e fattori di scala $2,\ 4,\ -1$ nelle direzioni $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,2,3)$

ESERCIZIO n. 19 A che trasformazioni del piano o dello spazio corrsipondono le seguenti: $(x,y)\mapsto(-y,x)$,$(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1,\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-1)$, $(x-y,x+y)$; $(x,y,z)\mapsto(x,-y,-z)$, $(x,y,0)$, $(\frac{1}{2}x,2y,0)$

ESERCIZIO n. 20 - Date due rette nel piano che trasformazione si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad una di esse e quindi la simmetria rispetto la seconda?
- Scambiando l'ordine di queste simmetrie quando si ottiene lo stesso risultato?

ESERCIZIO n. 21 Una trasformazione che manda ogni retta in un'altra retta parallela alla prima e non lascia nessun punto fisso del piano è una traslazione.
- Una trasformazione che manda ogni retta in un'altra retta parallela alla prima e lascia un punto del piano fisso è una dilatazione rispetto ad un punto.
-Dati due segmenti paralleli quante sono le traslazioni e le dilatazioni che trasformano uno nell'altro?
-Dati quattro punti $A\neq B$, $C\neq D$ vi è un'unica traslazione o dilatazione che trasforma A in C e B in D.

ESERCIZIO n. 22 Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari che trasformano $x^2+y^2=1$ in se?
-Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari che trasformano $|x|+|y|=1$ in se?

ESERCIZIO n. 23 Siano $a,b\in\mathbf{R}$ tali che $a^2+b^2=1$. La trasformazione $R:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, definita da $R(x,y)=(\xi,\eta)$, $\quad \xi=ax+by,\quad \eta=-bx+ay$, definisce una *rotazione* del piano (attorno all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2+\eta^2=x^2+y^2$ per ogni $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U=R(1,0)$, $V=R(0,1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato positivamente;

(iii) posto $(\xi',\eta')=R(x',y')$, si ha $(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2=(x-x')^2+(y-y')^2$ per ogni $(x,y),(x',y')\in\mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n. 24 Siano $a,b\in\mathbf{R}$ tali che $a^2+b^2=1$. La trasformazione $S:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, definita da $S(x,y)=(\xi,\eta)$, $\quad \xi=ax+by,\quad \eta=bx-ay$,
definisce una *simmetria* del piano (rispetto all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2+\eta^2=x^2+y^2$ per ogni $(x,y)\in\mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = S(1,0)$, $V = S(0,1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato negativamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = S(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n.25 Si provi che tutte e sole le trasformazioni lineari del piano che conservano il prodotto scalare sono le isometrie lineari (rotazioni e riflessioni).

ESERCIZIO n. 26 ** Le trasformazioni T bigettive del piano che mandano rette in rette sono tutte e sole le trasformazioni affini ($T(x, y) - T(0, 0)$ è lineare) e bigettive.

ESERCIZIO n. 27** Le trasformazioni del piano che conservano le distanze sono affini e la loro parte lineare è data da matrici con colonne ortogonali di norma 1, che rappresentano rotazioni e riflessioni.

ESERCIZIO n.28 Le trasformazioni lineari del piano che conservano gli angoli tra due semirette sono tutte e sole quelle del tipo $(x, y) \mapsto (ax + by, -bx + ay)$, $(ax + by, bx - ay)$.

ESERCIZIO n. 29 Si considerino i luoghi dei punti di $\mathbf{R}^2$ descritti dalle seguenti equazioni:

(i)	$x^2 + y^2 - 1 = 0,$	(v)	$x^2 + y^2 + xy = 0,$
(ii)	$x^2 + y^2 = 0,$	(vi)	$x^2 - y^2 = 0,$
(iii)	$x^2 + y^2 + 1 = 0,$	(vii)	$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0,$
(iv)	$x^2 + y^2 + 2xy = 0,$	(viii)	$(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0,$

e si riconosca quale delle precedenti equazioni rappresenta:

(a)	nessun punto,	(d)	una retta,
(b)	un punto,	(e)	due rette,
(c)	due punti,	(f)	una circonferenza.

ESERCIZIO n. 30 Riconoscere che tipo di coniche definiscono rispettivamente i seguenti luoghi di zeri:
$x^2 + y^2 + 2xy = 0$, $xy = 1$, $(x - y)^2 = (x + y)^2$, $x^2 + y^2 - 6xy - x + 4 = 0$, $xy - 23y + 8y - 1 = 0$, $3x^2 + 2y^2 - 3xy + x + y - 100 = 0$.

ESERCIZIO n. 31 Verificare che:
- un ellisse è il luogo dei punti con somma delle distanze da due punti fissi costante;
- un iperbole è il luogo dei punti con differenza delle distanze da due punti fissi costante;
- una parabola è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa e da un punto fisso.

OSSERVAZIONE si può verificare dando la nozione di tangenza che se una retta interseca una conica non degenere in un sol punto è ad essa tangente in quel punto.
DEFINIZIONE - Si dice cammino di riflessione rispetto ad una retta per un suo punto l'unione di due semirette (lati) con origine nel punto e simmetriche rispetto all'asse perpendicolare alla retta nel punto.
- Un cammino di riflessione rispetto ad un insieme in un suo punto è un cammino di riflessione rispetto all'eventuale retta tangente all'insieme dato in questo suo punto.

ESERCIZIO n. 32 Verificare che:
- i cammini di riflessione rispetto ad una parabola con un lato parallelo all'asse della stessa hanno l'altro che passa per il fuoco della parabola;
- i cammini di riflessione rispetto ad un'elisse che hanno un lato che passa per un fuoco hanno il secondo lato che passa per l'altro fuoco;
- i cammini di riflessione rispetto ad un iperbole che hanno un lato passante per un fuoco hanno prolungamento del secondo lato passante per l'altro fuoco.