Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

I foglio di esercizi
3 ottobre 2006

Programma, registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono si reperiscono in rete: http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html selezionando il nome del corso.

ESERCIZIO n. 1 (saggio preliminare)

-Si completino le eguaglianze seguenti: $3^5 = \dots$; $3^{-5} = \dots$; $27^{1/3} = \dots$; $27^{-1/3} = \dots$.

-Sapendo che $\log_{100} x^3 > 0$ quali sono tra le seguenti le affermazioni corrette? $x > 1$; $x = 1$; $0 < x < 1$; $x < 0$.

-Sapendo che due elevato alla decima è eguale a milleventiquattro, dire se è vero o falso che due elevato alla ventinovesima è maggiore di dieci elevato alla nona.

- Se $(a-b)(a+b) \neq 0$, l'espressione $\frac{a^4-b^2a^2}{a^4-b^4}$ è equivalente a quale tra le seguenti altre espressioni? $1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}$; $\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{a}{a^2+b^2}$; 0; $\frac{1-b^2}{1+b^2}$.

- La disequazione $\frac{x^6-1}{x-2} < 0$ è soddisfatta per quali tra i seguenti valori di x?
$x < 1$; $-1 < x < 1$; $x < -1$; $x < -1$ o $1 < x < 2$;.

- Quante colonne diverse che non diano tutte lo stesso risultato si possono giocare al Totocalcio? (Ricordiamo che vi sono tre simboli da disporre in una colonna di tredici elementi) A) $3^{13} - 13$; B) $3 \cdot 13^3 - 3$; C) $13^3 - 3$; D) $(3^{12} - 1)3$.

- Qual è il più grande tra i numeri: -31; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{9}$; -1?

- Un esame è costituito da una prova scritta e da una prova orale. Il 60% dei candidati ha superato lo scritto e tra questi il 90% ha superato anche l'orale. Determinare la percentuale, sul totale dei candidati, di coloro che hanno superato lo scritto ma non l'orale.

- Una funzione ha come parte del suo grafico un segmento che sale in verticale meno di quanto si sposti orrizontalmente e che incontra l'asse orizzontale di riferimento a sinistra del punto di incontro di questo con l'altro asse di riferimento. Quale delle seguenti funzioni può avere grafico corrispondente alla descrizione data? $y = \frac{1}{2}x^2 + x$; $y = \frac{1}{2}x$; $y = x^3$; $y = \frac{1}{2}x + 2$.

- L'area del parallelogramma di vertici $A = (1,2)$, $B = (3,4)$, $C = (4,3)$, $D = (6,5)$ è: $4\sqrt{2}$; 6; $\frac{1}{2}$; 4?

- Dire se è possibile costruire un triangolo con i lati lunghi rispettivamente: 3, 3, $\frac{5}{9}$.

- Un angolo misura $50°$. Quale, tra le seguenti, è la sua misura in radianti?
$\frac{1}{9}\pi$; $\frac{5}{18}\pi$; $\frac{2}{9}$; $\frac{9}{2}\pi$.

- Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
$\sin 2 = 0$; $\sin 2 = \frac{1}{2}$; $\sin 2 = \frac{\pi}{2}$; $\sin 2$ non ha senso ; $\sin 2 = 2\cos 1 \sin 1$.

- Si consideri la curva determinata dall' equazione $y = -3x^2 + x + 3$. Dire quali di questi punti giacciono su tale curva: $(1,-2)$; $(-3,-1)$; $(-1,3)$; $(1,1)$.

- La pendenza della retta passante per i punti $(2,5)$ e $(1,3)$ è: -2; $-\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2?

- I primi 1000 Km di un viaggio in treno vengono fatti pagare di più . Quale delle seguenti formule permette di calcolare il costo del biglietto per viaggi superiori a 1000 Km, indicando con x la lunghezza del viaggio? $700 + 0.05 \cdot (x - 1000)$; $0.7 \cdot x + 0.05 \cdot x$; $0.7 \cdot (x - 1000) + 0.05 \cdot x$.

- Si verifichino le seguenti identità:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy, \ x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2), \ x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$\frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}, \ \frac{x^3-8}{x^2-1} = x + \frac{x-8}{x^2-1}$$

DEFINIZIONE: dato $y \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$ si dice che $x \in \mathbf{R}$ è la sua *radice aritmetica* $n°$ se:

1) $x \geq 0$,

2) $x^n = y$. Si scrive $x = \sqrt[n]{y}$.

TEOREMA: Ogni numero reale non negativo ha un'unica radice $n°$.

ESERCIZIO n. 2 Si provi che :

- un numero reale negativo non ha radice quadrata;
- il numero $\sqrt{3}$ non è razionale (rapporto di numeri interi).

ESERCIZIO n. 3 - Dati a, b, c, con $a > 0$, si trovino in dipendenza i tre numeri dati altri tre numeri α, β, γ per cui:

$$ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)^2 + \gamma$$

- Si tovi una formula risolutiva per le soluzioni *reali* dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, e si dica quando ha senso.

- Si verifichi che se $x^2 + sx + p = 0$ allora s è 'meno la somma delle soluzioni' e p 'il prodotto delle soluzioni'.

ESERCIZIO n. 4 Si disegnino i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ dati da

$$\{x \in \mathbf{R} : \ x^2 + 3x - 10 > 0\}, \ \{x \in \mathbf{R} : \ \tfrac{x^3+27x}{x-10} > 0\}, \ \{x \in \mathbf{R} : \ \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+3} > 0\}$$

ESERCIZIO n. 5 Si disegnino i sottoinsiemi del piano, identificato con $\mathbf{R^2}$ (l'insieme delle coppie di numeri reali), rispettivamente definiti da ciascuna delle seguenti condizioni:

$(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x + y + 3 = 0, \ x^2 - y^2 = 0, \ x^2 + y^2 = 0, \ (x + y)^2 = 1, \ (x + y)^2 = 0, \ x^2 + y^2 = 4, \ x^2 = y, \ x^2 - y^2 = 1, \ 4x^2 + y^2 = 1$

ESERCIZIO n. 6 - Si scriva l'equazione che determina (come luogo di zeri) la retta passante per il punto di coordinate $(1, 1)$e per il punto $(3, 4)$.

- Si scriva l'equazione che definisce la retta per $(1, 1)$ e con direzione parallela a $(1, 2)$.
- Si scriva l'equazione della retta passante per $(1, 1)$ e che dista 1 dall'origine $(0, 0)$.
- Si trovino l'equazioni delle rette per il punto $(1, 1)$ e che toccano il sottoinsieme del piano definito dalla condizione $x^2 + y^2 = 1$ in un solo punto.
- Si trovi l'equazione che individua la retta che tocca l'insieme definito da $y = x^2$ solo nel punto di coordinate $(1, 1)$.

ESERCIZIO n. 7 Si scrivano le rette del precedente esercizio come cammini 'lineari' in $\mathbf{R}^2$ del tipo $t \mapsto (a, b) + t(c, d)$ al variare di t in $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO n.8 Si denoti con $n!$ il prodotto dei primi n numeri interi. Si provi $n! \leq n^n$. Si provi anche $n^n \leq \frac{(2n)!}{n!}$.

ESERCIZIO n. 9 - Si provi che la somma dei primi n numeri naturali $1 + 2 + \ldots + n$ è $\frac{n(n+1)}{2}$

- Si provi $1 + x + \ldots x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, e quindi generalizzando l'ultima parte dell' esercizio 1 si mostri che : $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + x^{n-k-1}y^k + ... + y^{n-1})$.

(Che dire su $x^n + y^n$?)

- $(1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$

- Se n è un numero naturale la sua scrittura *in base* 10 è $r_0+r_1\cdot 10+r_2\cdot 100+\ldots+r_k\cdot 10^k=n$ ove $0\le r_0,\ r_1\ldots<10$, sono rispettivamente r_0 il resto della divisione di n per 10, r_2 il resto della divisone per 10 del quoziente prima ottenuto etc. .
-Analogamente si esprimono i numeri naturali *in base* b, ove b è un altro numero naturale, con i resti delle divisioni per b dei successivi quozienti a partire da n.

ESERCIZIO n.10 - Si scriva 100 in base 2. In base decimale a cosa corrisponde la scrittura 100 in base 2?
Si provi che un numero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle cifre della sua espresione decimale è anch'essa divisibile per 9.
[$10=9+1,\ 100=99+1$ etc. .

ESERCIZIO n. 11 Dato $x\in\mathbf{R}$ si definisce *parte intera* di x l'unico numero n intero $x-1<n\le x$. Se $c_0=[x]$, $c_n=[10^n(x-c_0)-10^{n-1}c_1\ldots-10c_{n-1}]$ allora $x=c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{100}+\ldots=c_0,c_1c_2c_3\ldots$.

ESERCIZIO n. 12 - Si provi che $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$, se $x,\ y\ge 0$ e se ne dia un'interpretazione geometrica.
- Si provi $(1+x)^n\ge 1+nx$ se $x\ge 0$. Lo si provi anche per $x>-1$.

ESERCIZIO n. 13 Quali dei seguenti insiemi sono limitati?

$$\{x\in\mathbf{R}:\ x>1\},\ \{x\in\mathbf{R}:\ 0>x>1\},\ \{x\in\mathbf{R}:\ 2>x>1\},\ \{x\in\mathbf{R}:\ x^2+14=0\}$$
$$\{x\in\mathbf{R}:x^7+x^3=x^2\},\ \{x\in\mathbf{R}:\ 2>\tfrac{x-1}{x-2}>1\},\ \{x\in\mathbf{R}:\ 2>\tfrac{x^3-1}{x^2-2}>1\},$$
$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x^6y+xy^2=y^2\},\ \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:\ 2>\tfrac{x+y+z}{x-y-z}>1\},$$
$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ 2>\tfrac{xy}{x^2+y^2}>1\},$$

DEFINIZONE: - Se A e B sono insiemi l'insieme che ha come elementi *esattamente* quelli che sono *sia* elementi di A *sia* elementi di B è detto *intersezione* tra i due. Questo insieme si denota con $A\cap B$.

- L'insieme i cui elementi sono quelli che sono *indifferentemente* elementi di A *ovvero* elementi di B è detto *unione* dei due. Questo insieme si denota con $A\cup B$.

- Se si considera un'iniseme $\mathcal{A}$ i cui elementi sono insiemi l'insieme che ha come elementi *esattamente* quelli che sono elementi comuni a *ognuno* degli insiemi $A\in\mathcal{A}$ è detto *intersezione* di $\mathcal{A}$. Si denota con $\bigcap_{\mathcal{A}}$.

- L'insieme che ha come elementi quelli che sono elementi di *almeno uno* degli insiemi $A\in\mathcal{A}$ è detto *unione* di $\mathcal{A}$. Si denota con $\bigcup_{\mathcal{A}}$.

(- Quindi se $\mathcal{A}$ è l'iniseme che ha come elementi solo i due insiemi A e B si ha , $\bigcup_{\mathcal{A}}=A\cup B$.
- A parole si può dire che la condizione di essere elemento di un'intersezione è quella di soddisfare *tutte* le condizioni una per ciascun insieme della famiglia di cui si sta facendo l'intersezione. Nel caso finito è la condizione ottenuta dalla *congiunzione* di tali condizioni: sta in qusto *e* in quello *e* etc. . La condizione di essere elemento di un'unione è quella di soddisfare *almeno una* delle condizioni tra quelle che determinano gli insiemi della famiglia di cui si sta facendo l'unione. Nel caso finito è la condizione ottenuta dall'alternativa tra tali condizioni: sta in questo *o anche* in quello *o* etc . .)

ESERCIZIO n. 14 Se due sottoinsiemi A e B del piano sono eguali all'insieme delle coppie

(x, y) per cui $f(x, y) = 0$ e rispettivamente a quello delle coppie per cui $g(x, y) = 0$ che sottinsieme del piano è individuato da $f(x, y) \cdot g(x, y) = 0$? E da $f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = 0$?

ESERCIZIO n. 15 Trovare estremo superiore ed inferiore degli insiemi e dire se sono rispettivamente massimo e minimo:

$$]0;1],\ [1;4[\cap(]0;2[\cup]3;5]),\ \bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left[\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right];\ \bigcap_{n\in\mathbf{N}}\left]\frac{1}{n};n\right[,\ \bigcup_{m\in\mathbf{N}}\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\left]\frac{1}{n+m};m+n\right[,$$
$\{x \in \mathbf{R}:\ |x^2+1| < |x-3|-1\}$, $\{x \in \mathbf{R}:\ |x^2| < \left|x-\frac{3}{x}\right|-1\}$,
$\{x \in \mathbf{R}:\ |x^2-1| < |x+3|-2\}$, $\{x \in \mathbf{R}:\ :4 > |1-x||1+x| + (1-x)^2\}$
$\{x \in \mathbf{R}:\ x^2 + |x-1| < 2\} \cap \mathbf{Q}$
$\{x:\ \frac{x+1}{|x-2|} - 2|x| > 0\}$, $\{x:\ \log x^2 \geq \log(2x-1)\} \cap \mathbf{Q}$, $\{x:\ \log_x(2x-1) \geq 2\}$
$\bigcap_{y\in\mathbf{R}}\{x:\ |x+y| + y \leq 2\}$; $\bigcup_{y\in\mathbf{R}}\{x:\ |x+y| + y \leq 2\}$;
$\{z \in \mathbf{R}:\ z = \frac{xy}{x^2+y^2}:\ 0 < x,\ y < 1\}$, $\{z \in \mathbf{R}:\ z = \frac{xy}{x+y}:\ 0 < x,\ y < 1\}$,
$\{z \in \mathbf{R}:\ z = \frac{nm}{n^2+m^2}:\ n,\ m = 1,\ 2...\}$, $\{z \in \mathbf{R}:\ z = \frac{nm}{n+m}:\ n,\ m = 1,\ 2...\}$,
$\{z \in \mathbf{R}:\ z = \frac{m-2}{3n}:\ n,\ m = 1,\ 2...\}$, $\{z \in \mathbf{R}:\ z = \frac{1}{n} + (2m+1)\frac{\pi}{2}: n, m = 1,\ 2\ldots\}$,

---

ESERCIZIO n. 16 Calcolare estremo superiore, inferiore, e indicare se sono valori massimi o minimi, delle seguenti espressioni al variare degli argomento come rispettivamente specificato:
$7n^3 - n^4,\ n \in \mathbf{N}$; $7n^6 - n^8,\ n \in \mathbf{N}$; $7x^6 - x^8,\ x \in \mathbf{R}$; $\sin\frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}$; $\sqrt{n} - [\sqrt{n}],\ n \in \mathbf{N}$;
$\dfrac{x^6+x^4+1}{x^4+2x^2-3},\ x^4+2x^2-3 \neq 0$; $\dfrac{n^6+n^4+1}{n^4+2n^2-3},\ n \in \mathbf{N}\ n^4+2n^2-3 \neq 0$; $(x^2+1)e^{-(x^2-1)},\ x \in \mathbf{R}$;
$\dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbf{N}$; $\dfrac{2m}{m^2+1},\ m \in \mathbf{Z}$; $(-n)^n + \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}$; $n + \dfrac{1001}{n},\ n \in \mathbf{N}$; $x^2 + \dfrac{1001}{x^2+1},\ x \in \mathbf{R}$

ESERCIZIO n. 17 Calcolare estremo superiore, inferiore, e specificare se sono valori massimi o minimi, delle seguenti espressioni:

$$n\cos m\pi - \frac{3}{2+n},\ m,\ n \in \mathbf{N};\ \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2},\ \ m,\ n \in \mathbf{N};\ \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2},\ xy > 0;$$
$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{x^2y^2z^2},\ xyz > 0$$
$\sum_{1\leq n\leq 100} |a_n|$ al variare di $a_1, \ldots a_{100}$ tra le famiglie per cui $\sup\{|a_n|; 1 \leq n \leq 100\} < 1$.

NOTAZIONE:

$A + B = \{x \in \mathbf{R}:\ \exists a \in A,\ b \in B\ x = a + b\}$, $\lambda A = \{x \in \mathbf{R}:\ \exists a \in A\ x = \lambda a\}$.

ESERCIZIO n. 18 Provare che:
a - se $A \subseteq B$ allora $\sup A \leq \sup B$ e $\inf B \leq \inf A$;
b - $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$, $\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$, $\sup \bigcup_{i\in I} A_i = \sup_{i\in I} \sup A_i$;
c - $\sup A + B = \sup A + \sup B$, $\sup -A = -\inf A$, $\sup \gamma^2 A = \gamma^2 \sup A$;
d - se $f: I \to \mathbf{R}$, $g: I \to \mathbf{R}$ allora: $\sup_{x,y\in I} f(x) + g(y) = \sup_{x\in I} f(x) + \sup_{x\in I} g(x) \geq \sup_{x\in I} f(x) + g(x)$.
Si provi che la diseguaglianza è necessaria, e si trovi e provi un analogo per l'estremo inferiore;

ESERCIZIO n. 19 - Dati $a_1 \neq a_2$ trovare il più grande y per cui $|x - a_1| + |x - a_2| \geq y$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ (per ogni punto la somma delle distanze dai punti dati sia più grande di y).

*- Si generalizzi se sono dati n punti diversi $a_1,\ a_2, \ldots a_n$.