Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

Diseguaglainza tra media geometrica e media aritrmetica e numero e

Materiale relativo al corso può essere reperito in rete http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html#alt e quindi selezionando ALTRI CORSI DI LAUREA e Corso di laurea *****

- Per ogni $n \in \mathbf{N}$ vale la seguente proprietà D_n:
  comunque siano dati n numeri non negativi si ha $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots x_n}{n}$.

DIMOSTRAZIONE: Lo schema è il seguente:

1- Si ha che se vale D_n vale D_{2n}.

2- Si ha che se vale D_{n+1} vale D_n.

3- Si deduce che per ogni n vale D_n (ovvero è vero che *la media geometrica è sempre minore o eguale alla media aritmetica*).

Il terzo punto segue direttamente dal metodo di induzione. Infatti dal primo punto per induzione su m si deduce che D_{2^m} è vera per ogni m: D_{2^1} è vera, e se è vera D_{2^m} per il primo punto ne segue $D_{2^{m+1}}$
Quindi per provare che D_n vale si osserva che essendo vera D_{2^n} il secondo punto permette "tornare indietro".

(Per quanto intuitivo questo ultimo passaggio a rigore rende necessario un argomento induttivo abbastanza ostico, per rendere conto dell'argomento del "tornare indietro un numero variabile di passi": si considera la proprietà C_h: "se vale D_h allora vale D_m per tutti gli $m \leq h$" e la si dimostra per induzione su h. C_1 è vera. Se vale C_h bisogna mostrare che vale C_{h+1}: ora se si assume che vale D_{h+1} dalla prima parte si ha che vale D_h e quindi utilizzando l'ipotesi induttiva C_h si ha che vale D_m per ogni $m \leq h$, e d'altronde si è assunto che vale anche D_{h+1}. Quindi C_h vale sempre, in particolare per $h = 2^n > n$).

Il primo punto si prova come segue: D_2 vale poichè posto $x = a^2$, $y = b^2$ vale $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$. Quindi si prosegue:

$$\sqrt[2n]{x_1 \dots x_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}\sqrt[n]{x_{n+1} \dots x_{2n}}} \leq$$

per D_2 avendo come argomenti le due radici n^e:

$$\leq \frac{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \dots x_{2n}}}{2} \leq$$

usando D_n due volte con $x_1 \dots x_n$ e per $x_{n+1} \dots x_{2n}$

$$\leq \frac{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n}}{2} =$$

$$= \frac{x_1 + \dots + x_{2n}}{2n}$$

Il secondo punto si prova come segue: dati n numeri non negativi $x_1, \dots,\ x_n$ si usa D_{n+1} per i numeri $x_1, \dots,\ x_n$ e $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, in modo che elevando alla $n+1$ i membri della diseguaglianza ottenuta si ha:

$$x_1 \cdot \ldots x_n \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n + \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}{n+1} \right)^{n+1} = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^{n+1}$$

quindi si divide per la media aritmetica di $x_1, \dots x_n$ e si fa la radice n^a.

Un'applicazione di questa diseguaglianza tra media aritmetica e media geometrica riguarda il fatto che la successione che da il valore finale dopo n istanti di una grandezza che varia ad ogni istante con un tasso $\frac{x}{n}$, cresce al crescere di n:

Per esempio il debito "cumulato" alla scadenza di un periodo di prestito, con un tasso di interesse composto $\frac{x}{n}$, variabile in funzione del numero n dei sottoperiodi concessi per l' "estinzione del debito", cresce al crescere di n :

$$1 + x,\ 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}(1 + \frac{x}{2}) = (1 + \frac{x}{2})^2, \dots,\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n :\quad x_{h+1} - x_h = \frac{x}{n} x_h,\ x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Più precisamente

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ (se } n > 1 - x\text{)},$$

(NOTA: tale diseguaglianza si può chiaramente provare direttamente per induzione, per il caso $x = 1$, ovvero $x \geq 0$, si veda Faedo-Modica pag. 85).

DIMOSTRAZIONE - $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\ldots_{n \text{ volte}}\ldots\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot 1 \leq$

si usa la diseguaglianza tra le medie di $n+1$ numeri *non negativi*

$$\leq \left(\frac{1+\frac{x}{n}+\ldots_{n \text{ volte}}\ldots+1+\frac{x}{n}+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

Corollario: La successione $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ converge.
DIMOSTRAZIONE - Essendo crescente basta mostrare che è limitata superiormente. Basta mostrarlo per $n \geq 0$. Si ha per $n \geq x \geq 0$: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$
quindi essendo $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ crescente per gli $n > x$si ha quanto desiderato.

DEFINIZIONE: Il numero limite della successione crescente $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ si dice *costante di Nepero* e si indica con la lettera e.
TEOREMA Il limite di $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è e^x.

- Un'altra diseguaglianza notevole è la seguente $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$,
DIMOSTRAZIONE- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \geq$

per quanto provato al punto precedente con $x=-1$

$$\geq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

NOTA: poichè $0 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}$ la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
da invece un'approssimazione per eccesso di e.

- Infine è interessante la seguente:
$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$ (se $n \geq 4$) da cui segue che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Per provare che $\sqrt[n]{n}$ decrescere al crescere di $n \geq 4$ si procede come segue:
$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$ se e solo se
$n^{n+1} \geq (n+1)^n$ se e solo se
$n \geq \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
Si ha inoltre:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq$ (si moltiplica per un numero maggiore di 1)

$\leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq$ (essendo decrescente per quanto appena provato)

$\leq (1+1)^2 = 4$.
Quindi per $n \geq 4$ si ha $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$.