MATEMATICA
Anno Accademico 2005-2006
Scienze Geologiche
M.Novaga, V.M. Tortorelli
I prova finale, 2 febbraio 2006

I PARTE: si dia la risposta alle seguenti domande senza giustificazione

---

1 - Si trovi la direzione normale all'insieme definito da $z = x^2 + y^2$ nel punto $(1, 1, 2)$.

R.: L'insieme è luogo di zeri della funzione differenziabile $x^2 + y^2 - z$ che nel punto ha gradiente: $(2x, 2y, -1)_{|x=1,y=1,z=2} = (2, 2, -1) \neq 0$. Per funzioni differenziabili il gradiente non nullo è ortogonale agli insiemi di livello. La direzione è $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

2- Si determino i punti di "sella" del grafico della funzione $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + x^2 + y^2$.

R.: La funzione è differenziabile. I punti ove si annulla il differenziale sono le soluzioni di $\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 + 6x^2 + 2x = 0 \\ 4y^3 + 4x^2y + 2y = 0 \end{cases}$ Per $y = 0$ la seconda equzione è soddisfatta e la prima si riduce a $4x^3 + 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 + 3x + 1) = 0$ che ha come soluzioni $x = 0,\ x = -\frac{1}{2},\ x = -1$. Quindi $(0, 0),\ (-\frac{1}{2}, 0),\ (-1, 0)$ sono soluzioni e si può supporre $y \neq 0$. Appunto dividendo la seconda per y si ha $4y^2 + 4x^2 + 2 = 0$ che non ha soluzioni.

Per decidere quali tra i punti trovati siano di sella conviene nel caso considerare la segnatura della matrice Hessiana delle derivate seconde essendo al funzione due volte differenziabile:
$\begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 + 12x + 2 & 8xy \\ 8xy & 12y^2 + 4x^2 + 2 \end{pmatrix}$ Nei punti $(0, 0),\ (-\frac{1}{2}, 0),\ (-1, 0)$ si ha:
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - 6 + 2 & 0 \\ 0 & 1 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 - 12 + 2 & 0 \\ 0 & 4 + 2 \end{pmatrix}$ rispettivamente.

Solo la seconda ha una direzione di minimo e una di massimo. La "sella" è $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{16})$.

3- Si calcoli l'area della superficie definita da $x^2 - y^2 = z,\ x^2 + y^2 \leq 1$.

R.: Si tratta di calcolare l'area del grafico di $f(x, y) = x^2 - y^2$ su $x^2 + y^2 \leq 1$. Per definizione è data dall'integrale: $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}dxdy = \int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$

Piuttosto che ridurre subito tale integrale osservando che si al'integranda che il dominio dipendono solo dalla distanza dall'origine conviene esprimerlo in coordinate polari $(x, y) = \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, usando la formula per $p = \Phi(q)$: $\int_{\Phi(A)} g(p)dp = \int_A g(\Phi(q))|det\ d\Phi(q)|dq$.

Nel caso poichè det $d\Phi(r, \theta) = r$ si ottiene $\displaystyle\int_{0\leq r\leq 1} \sqrt{1 + 4r^2}rdrd\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}rdr =$
$\displaystyle(t = r^2,\ dt = 2rdr) = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4t}dt = \pi\frac{2}{4 \cdot 3}\ (1 + 4t)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$

4- Si trovino le soluzioni del sistema differenziale ai dati iniziali $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

R.: Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, Quindi le soluzioni dell'omogena sono $ae^t + bte^t,\ a,\ b \in \mathbf{R}$. Dal metodo dei "coefficienti indeterminati" una soluzione partcolare dovrà essere del tpo ct^2e^t. Derivando e sostituendo nell'equazione si ottiene $2ce^t = e^t$. Tutte le soluzioni sono $ae^t + bte^t + \frac{t^2}{2}e^t,\ a,\ b \in \mathbf{R}$: da $y(0) = 0$ si ha $a = 0$,da $y'(0) = 0$ si ha $b = 0$.

II PARTE: si risponda alla seguenti domande dando esaurienti giustificazioni

a) Si scriva $S : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^3$ l'inversa della proiezione stereografica dal "polo nord" sul piano tangente al "polo sud" per una sfera di centro l'origine e raggio unitario.
b) Si verifichi direttamente che la matrice Jacobiana di S in ogni punto ha colonne ortogonali e di egual modulo, e quindi conserva gli angoli tra curve.
c) Si calcoli la lunghezza della curva sulla sfera che ha come proiezione stereografica il segmento di estremi $(1,0)$ e $(1,\sqrt{5})$.

R.: a) La proiezione steregrafica in questione è data da $\begin{cases} u = \frac{2x}{1-z} \\ v = \frac{2y}{1-z} \end{cases}$ $\quad x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \neq 1$. Si tratta di esprimere (x,y,z) in termini di (u,v).
Dalle prime due equazioni $x = \frac{u(1-z)}{2},\ y = \frac{v(1-z)}{2}$. Imponendo l'ultima condizione si ottiene:
$0 = 4z^2 + (u^2+v^2)(1-z)^2 - 4 = (u^2+v^2+4)z^2 - 2(u^2+v^2)z + u^2+v^2-4.$
Per cui z assume i valori $\dfrac{2(u^2+v^2) \pm \sqrt{4(u^2+v^2)^2 - 4(u^2+v^2)^2 + 4\cdot 16}}{2(u^2+v^2+4)} = \dfrac{u^2+v^2 \pm 4}{u^2+v^2+4}$, deve essere $z \neq 1$: l'unica soluzione ammissibile è $z = \dfrac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4} = 1 - \dfrac{8}{u^2+v^2+4}$. Per cui

$$S(u,v) = \left(\frac{4u}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4}\right)$$

b) La matrice Jacobiana di S ha come righe le derivate parziali di ogni componente di S: $M =$

$$\left(M^1|M^2\right) = \begin{pmatrix} \frac{16-4u^2+4v^2}{(u^2+v^2+4)^2} & -\frac{8uv}{(u^2+v^2+4)^2} \\ -\frac{8uv}{(u^2+v^2+4)^2} & \frac{16+4u^2-4v^2}{(u^2+v^2+4)^2} \\ \frac{16u}{(u^2+v^2+4)^2} & \frac{16v}{(u^2+v^2+4)^2} \end{pmatrix} = \frac{4}{(u^2+v^2+4)^2}\begin{pmatrix} 4-(u^2-v^2) & -2uv \\ -2uv & 4+u^2-v^2 \\ 4u & 4v \end{pmatrix}$$

Le colonne sono chiaramente ortogonali avendo prodotto scalare nullo. A parte il denominatore i moduli al quadrato sono la somma dei quadrtai delle componenti. Per la prima $(4-(u^2-v^2))^2+4u^2v^2+16u^2$ per la seconda $(4+(u^2-v^2))^2+4u^2v^2+16v^2$, rispettivamente $16+u^4+v^4-8u^2+8v^2-2u^2v^2+4u^2v^2+16u^2$ e $16+u^4+v^4+8u^2-8v^2-2u^2v^2+4u^2v^2+16v^2$ eguali a $(4+u^2+v^2)^2$.
Per il coseno si osserva che $M\binom{a}{b}\cdot M\binom{\alpha}{\beta} = (aM^1+bM^2)\cdot(\alpha M^1+\beta M^2) =$ (proprietà colonne) $(a\alpha+b\beta)|M^1|^2$, e quindi il coseno dell'angolo tra le velocità (a,b) e (α,β) è eguale a quello dell'angolo tra i trasformati. Analogamente per il seno con il prodooto vettore.

c) Il segmento è parametrizzato in modo iniettivo dal cammino lineare: $(u(t),v(t)) = (1,t\sqrt{5}) = \sigma(t),\ 0 \leq t \leq 1$ Un cammino iniettivo sulla sfera unitaria la cui immagine ha il segmento come proiezione stereografica è $t \mapsto S(\sigma(t)) = \gamma(t)$. La lunghezza di una curva è:

$$\int_0^1 |\gamma'(t)|dt$$

Per la regola della catena $\gamma'(t) = dS_{\sigma(t)}\sigma'(t) = M\sigma'(t) = M\binom{0}{\sqrt{5}}$ il cui modulo è
$\sqrt{5}\dfrac{4(4+u^2+v^2)}{4+u^2+v^2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{(4+u^2+v^2)^2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{4+5t^2}$. Poichè questa ha una primitiva $2\mathrm{artan}\frac{\sqrt{5}}{2}t$ per il teorema fondamentale del calcolo la lunghezza cercata è $2\mathrm{artan}\frac{\sqrt{5}}{2}$