

ESERCIZIO n. 1 Determinare i punti critici delle seguenti funzioni: $x^3 + (x-y)^2$, $x^4 + (x-y)^2$, $xy + y^2 - 3x$, $\sin(x+y)$, $x^2 - \sin y$, $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

ESERCIZIO n. 2 Si dica se $(0,0)$ è di massimo, di minimo, o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni: $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$, $1 - x^4 - x^2y^2 - y^4$.

ESERCIZIO n. 3 Determinare minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:

$$\begin{array}{l} xy \quad \text{su} \quad \{x^2 + y^2 \leq 1\} \\ x^2 + y^2 - (x+y) \quad \text{su} \quad \{|x| \leq 1, |y| \leq 1\} \\ \frac{x^2y}{x^2+4y^2} + x \quad \text{per } xy > 0 \quad xy + x \quad \text{per } xy \leq 0 \quad \text{su} \quad \{0 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq 1\} \end{array}$$

ESERCIZIO n. 4 Sia $f(x,y) = 2x^4 - x^2e^y + e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f = c$, al variare di c in \mathbf{R} , mettendo in risalto quali sono connesse, quali sono limitate.

ESERCIZIO n. 5 Sia data un insieme di coppie $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione:

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2 \text{ sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?}$$

ESERCIZIO n. 6 Si ricorda che $C \subseteq \mathbf{R}^n$ è detto convesso se contiene interamente i segmenti delimitati dai suoi punti: se $x \in C$, $y \in C$ e $\lambda \in [0; 1]$ allora $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Una funzione $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ si dice convessa se C è convesso e se $\lambda \in [0; 1]$ allora $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

a) Sia Ω un aperto convesso di \mathbf{R}^n , e sia $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile. Dimostrare che f è convessa se e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$: $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare in \mathbf{R}^n .

b) Nelle stesse ipotesi si deduca che f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra ogni piano tangente ad esso.

c) Se poi f è C^2 si provi che f è convessa se e solo se $Hf(x)$ è definita non negativa in ogni punto.

ESERCIZIO n. 7

a) Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un estremo interno a Ω . Nel caso si tratterebbe di un massimo o di un minimo?

b) Utilizzando il fatto che una funzione convessa a valori reali, definita su un chiuso C limitato convesso è continua si provi che se $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso, allora il massimo di f è assunto su $\partial\Omega$.

ESERCIZIO n. 8 Trovare i punti di massimo o di minimo relativo e calcolare i valori di massimo relativo e minimo relativo, delle seguenti funzioni sui domini rispettivi:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^3y}{x^4 + y^4}, \quad y - x^2 = 0; \quad f(x, y) = \sin((x - 2)^2 + y^2), \quad (1 - x)^3 + y^2 = 0;$$

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 3y^2, \quad x^2 + y^2 - 2xy = \frac{1}{(x+y-2)^2};$$

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2 - y + z^2)}, \quad \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1, \quad (\text{Ex.C.P.S.29.14, 278});$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \begin{cases} (z + 1)^2 - y^2 - (x + 3)^2 = 0 \\ z^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases};$$

$$f(x, y, z) = (x + 1)^2 + (y - \varepsilon)^2 + z, \quad \begin{cases} (1 - x)z = (1 + x)y \\ z^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases};$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2, \quad \text{tetraedro di vertici } (-1, -1, -1), (1, -1, -1), (0, 1, -1), (0, 0, 1);$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2, \quad \max\{|x + 2|, |y + 3|, |z + 4|\} = 1;$$

$$f(x, y, z, w) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{w^2}{4}, \quad \begin{cases} (x + y + z + w)^2 + (x - y + z - w)^2 = 1 \\ (x - y - z + w)^2 + (x - y - z - w)^2 = 1 \end{cases}$$

* ESERCIZIO n. 9 È vero che il minimo valore di $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ su $(x - R)^2 + (y - R)^2 = 2R^2$ è sempre 0? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO n. 10

- Trovare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto nell'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
- Trovare l'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ di volume massimo per cui $a + b + c = M$, $a, b, c > 0$.
- Trovare la minima distanza tra gli insiemi $\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{yz = xz\}$ e $\{z - y = 0\} \cap \{x + y + z = 1\}$.

ESERCIZIO n.11 Sia \mathbf{O} l'insieme delle matrici ortogonali $n \times n$, e sia $f : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \text{tr } A$. Si dimostri che esistono unici e si calcolino il massimo e il minimo di f .

ESERCIZIO n.12

- Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un estremo interno a Ω . Nel caso si tratterebbe di un massimo o di un minimo?
- Utilizzando il fatto che una funzione convessa a valori reali, definita su un chiuso C limitato convesso è continua si provi che se $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso, allora il massimo di f è assunto su $\partial\Omega$.

ESERCIZIO n.13 Dato un vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$, tale che $x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, si definisce $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$. Determinare:

a) Il vettore che massimizza H .

b) Il vettore che massimizza H sotto il vincolo $\sum_{i=1}^n x_i y_i = c$, dove $y = (y_1, \dots, y_n)$ è un vettore qualsiasi.

ESERCIZIO n.14 In un mercato duopolistico ci sono n aziende che producono lo stesso bene, ognuna in quantità y_i . Il prezzo p del bene dipende dalla quantità totale prodotta $\sum_{i=1}^n y_i$. Ogni azienda decide di produrre la quantità y_i che massimizza il proprio profitto:

$$f_i(y_i) = p \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) y_i - c y_i$$

dove c è il costo unitario di produzione del bene.

Determinare in quali condizioni il mercato è in equilibrio (ogni azienda, cioè, non intende modificare la propria produzione y_i).

Dimostrare che per $n \rightarrow \infty$ il prezzo di equilibrio p converge a c .

ESERCIZIO n.15 Siano $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo, limitato o meno, $f : (x, y) \in I \times \mathbf{R} \mapsto f(x, y)$ una funzione per cui dato $y \in \mathbf{R}$ $\exists \min_{x \in I} f(x, y) := g(y)$ e si ponga $C(y) =: \{x \in I : f(x, y) = g(y)\}$.

a: Per $I = [0; 1]$ si mostri un esempio in cui g non risulta derivabile in qualche punto, pur essendo f differenziabile infinite volte.

[Si consideri il sopragrafico di g in termini di quello di f]

b: - Se $y \mapsto f(x, y)$ è continua si provi che: $o(1) \geq g(y+h) - g(y)$, per $h \rightarrow 0$

- se poi esiste $\frac{\partial f}{\partial y}$ si provi: $h \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + o(h) \geq g(y+h) - g(y)$, per $h \rightarrow 0$ e $x \in C(y)$

c: Se f è continua su $I \times \mathbf{R}$, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \in I \times \mathbf{R}$ e $x_n \in C(y_n)$ si provi che $x \in C(y)$.

d: Si assuma che $I = [a; b]$ sia limitato e chiuso.

- Si provi che se f è continua su $I \times \mathbf{R}$ anche g lo è su \mathbf{R} ;

[Si usi giustificatamente l'uniforme continuità di f sui sottoinsiemi limitati di $I \times \mathbf{R}$]

- (*) se poi vi è $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua allora g ha derivata "in avanti" eguale al minimo di $\frac{\partial f}{\partial y}$ su $C(y)$:

$$\exists (\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} :=) \frac{d^+}{dy} \min_x f(x, y) = \min_{x \in C(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

[Ci si riduca ad usare il teorema del valor medio, uniforme continuità, sottosuccessioni e il risultato del terzo punto]

e: Si mostri, anche con una semplice esemplificazione grafica, che vi sono f differenziabili infinite volte su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ per cui g non è continua né a destra né a sinistra.

(*) La pur breve soluzione presenta difficoltà tecniche elevate rispetto a quanto svolto nel corso.