

**Equazioni di base**

“**Quadratura**” semplice Se  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  è continua su  $A$  segmento in  $\mathbf{R}$ , per il teorema fondamentale del calcolo la  $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds$  è l’unica soluzione del problema di Cauchy  $\begin{cases} y'(t) = f(t), & t \in A \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

**Variabili separabili** Se  $f : A \rightarrow \mathbf{R}, g : B \rightarrow \mathbf{R}$  sono funzioni continue su  $A$  e su  $B$ , segmenti in  $\mathbf{R}$ , si tratta

di trovare le  $y \in C^1(I), I$  segmento incluso in  $A$ , per cui  $y'(t) = f(t)g(y(t)), t \in I$

- Se per  $\bar{y} \in B$  si ha  $g(\bar{y}) = 0$  allora la funzione costante  $y(t) = \bar{y}, t \in A$  è soluzione.

*Procedimento euristico*

i- si cercano le soluzioni che non si annullano: dall’equazione deve essere  $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$

ii- si considera  $\Gamma$  primitiva di  $\frac{1}{g}$  su  $J \subset B$

iii- si considera  $F$  primitiva di  $f$

iv- si scelgono  $I \subset A$  e  $c \in \mathbf{R}$  in modo che  $c + F(I) \subset \Gamma(J)$

l’eventuale soluzione deve verificare l’equazione  $\Gamma(y(t)) = F(t) + c, t \in I$

*Il procedimento inverso* Considerando quindi

i- un generico  $]\alpha, \beta[ \subset J$  in modo che  $g$  si annulli solo agli estremi di  $J$ ,

ii-una generica  $\Gamma$  primitiva di  $\frac{1}{g}$  su  $J$  (essendo  $g$  continua non cambia segno e  $\Gamma$  sarà invertibile su  $J$ )

iii-una generica primitiva  $F$  di  $f$  su  $A$

iv- e determinando di conseguenza  $I$  e c t.c.  $c + F(I) \subseteq \Gamma(J)$ , l’intervallo di estremi  $\Gamma(\alpha)$  e  $\Gamma(\beta)$ , si trova che

$$y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c), t \in I$$

è una soluzione e inoltre  $\alpha < y(t) < \beta, t \in I$ .

Problema di Cauchy 1: Quindi se  $g(y_0) \neq 0$  per determinare una soluzione locale al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t)g(y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- si prende  $J$  in modo che  $y_0 \in J$  e  $g$  non si annulli se non agli estremi di  $J, \Gamma(p) = \int_{y_0}^p \frac{du}{g(u)}, p \in J$

-  $F(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds, I$  per cui  $t_0 \in I$  e  $F(I) \subset \Gamma(J)$

La funzione  $y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c)$  è ben definita ed è soluzione, e tale  $y$  è a valori in  $J: \alpha < y(t) < \beta$ , per  $t \in I$ . Si ha l’esistenza locale per tale problema e il fatto che la soluzione è *unica finchè non annulla g*.

Problema di Cauchy 2: Se  $\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{\beta-\varepsilon}^{\beta} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$  si ottiene che la soluzione trovata è globale e non può annullare  $g$  se non agli estremi di  $A$ : infatti se fosse  $g(y(t_1)) = 0$  si avrebbe  $y(t_1)$  eguale ad  $\alpha$  o a  $\beta$  da cui  $\int_{t_0}^{t_1} f(s)ds = \int_{y_0}^{y(t_1)} \frac{du}{g(u)} = \pm\infty$ . Ma  $f$  ha integrale finito sugli intervalli limitati e chiusi contenuti in  $A$  essendo continua.

Problema di Cauchy 3: Analogamente se  $y_0$  è uno zero isolato di  $g$  e  $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$  si ha che la funzione costantemente eguale a  $y_0$  è l’unica soluzione del problema di Cauchy.

**Equazioni lineari del primo ordine**  $y'(t) - a(t)y(t) = f(t)$  con  $f$  e  $a$  funzioni continue su un intervallo  $I$ .

*Omogenea*  $u'(t) = a(t)u(t)$ : se  $\alpha' = a$  lo spazio vettoriale delle soluzioni è dato da  $u(t) = ce^{\alpha(t)}$ .

*Soluzioni* Moltiplicando per  $e^{-\alpha(t)}$  ci si riduce alla ricerca di primitive di  $e^{-\alpha(t)}y(t)$  e le soluzioni sono date

$$y(t) = ce^{\alpha(t)} + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t)-\alpha(s)} f(s)ds = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_t^s a(x)dx} f(s)ds$$

si noti che tutte le soluzioni dell’equazione completa si ottengono da una particolare soluzione (il secondo addendo) sommando una soluzione dell’omogenea.

**Notazione dei numeri complessi** - Per esporre in maniera più significativa quanto segue conviene introdurre la notazione dei numeri complessi. Con campo dei numeri complessi s'intende l'insieme delle espressioni  $a + ib$  ove  $a \in \mathbf{R}$ ,  $b \in \mathbf{R}$  e il parametro  $i$  è una costante *non reale* a cui si impone la regola di calcolo  $i^2 = -1$ . Somma e prodotto di numeri complessi sono quindi quelli dei polinomi nella "variabile"  $i$  a coefficienti reali, solo che nei calcoli si usa la regola data per ridursi sempre a polinomi di primo grado. I numeri reali si identificano con i numeri complessi del tipo  $a + i0$ . Il campo dei numeri complessi si indica con  $\mathbf{C}$  e spesso si identifica con  $\mathbf{R}^2$ :  $a + ib \sim (a, b)$ .

- **Forma trigonometrica** Considerando le coordinate polari nel piano ogni numero complesso si scrive nella forma  $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . L'angolo  $\varphi$  non è individuato se non a meno di multipli di  $2\pi$ : e.g. se  $a > 0$ ,  $b > 0$  allora  $a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos \arctan \frac{b}{a} + i \sin \arctan \frac{b}{a})$ . Appunto  $\rho$  si dirà modulo di un numero complesso, e  $\varphi \in [0; 2\pi[$  argomento principale.

- Dalle formule di addizione se  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  si ha:  $zw = \rho r(\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta))$   
 Quindi ogni numero complesso  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ha esattamente  $n$  radici  $n^e$  complesse

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}) \dots z_n = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \left( \frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n} \right) \right)$$

Le radici  $n^e$  di 1 sono quindi i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza unitaria.

Si hanno a disposizione tutti gli strumenti per dare la dimostrazione del seguente teorema (la si omette).

**Teorema 1 FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA** Ogni polinomio a coefficienti complessi  $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  di grado  $n$  è prodotto di termini del tipo  $(z - w)^k$  per  $a_n$ . I numeri  $w$  sono tutte e sole le radici del polinomio, i numeri  $k$  sono le rispettive molteplicità e la loro somma è  $n$ .

Poichè un polinomio a coefficienti reali se ha come radice  $w = a + ib$  ha anche come radice  $a - ib$  si ha che un polinomio a coefficienti reali si scrive come prodotto di termini del tipo  $(x - c)^k$ ,  $((x - a)^2 + b^2)^h = (x - (a + ib))^h(x - (a - ib))^h$ , ove  $c$  sono le radici reali e la somma degli  $k$  e dei  $2h$  è il grado del polinomio.

**Forma esponenziale** Considerando il modulo di un numero complesso come esponenziale e osservando che il prodotto di numeri complessi ha come argomento la somma degli argomenti riportata in  $[0; 2\pi[$  è suggestivo definire  $e^{\alpha + i\beta} = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta)$  constatando che ha le stesse regole di calcolo dell'esponenziale.

**Teorema 2** Si consideri l'equazione lineare nell'incognita  $y(t)$ :  $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$ , con coefficienti e termine noto funzioni continue su un intervallo  $I$  con  $a(t) \neq 0$ .

1- L'insieme delle soluzioni dell'equazione con termine noto nullo (equazione omogenea associata) è uno spazio vettoriale di dimensione 2 ovvero trovate due soluzioni dell'omogenea linearmente indipendenti  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  ogni altra soluzione è del tipo  $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$  con  $c_1, c_2$  costanti reali.

2- Vi è almeno una soluzione dell'equazione  $u^*(t)$ .

3- Tutte le altre soluzioni dell'equazione sono del tipo  $u^*(t) + c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ .

**Approccio generale per risolvere il problema di Cauchy**  $\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

1- si determina una base delle soluzioni dell'omogenea  $(u_1(t), u_2(t))$

2- si trova una soluzione particolare  $u^*(t)$

3- si cerca  $c = (c_1, c_2) \in \mathbf{R}$  per cui  $c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + u^*(t)$  verifichi le condizioni iniziali del problema.

**Passo 1 nel caso di coefficienti costanti**

Il caso elementare per trovare soluzioni è quello in cui i coefficienti sono funzioni costanti.

**Teorema 3.** Si consideri l'equazione lineare omogenea nell'incognita  $u(t)$ :  $au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$ , con coefficienti costanti reali. Si ha che tutte e sole le soluzioni sono:

$$u(t) = \begin{cases} c_1e^{t\alpha} \cos \beta t + c_2e^{t\alpha} \sin \beta t & b^2 - 4ac < 0 \\ c_1e^{t\alpha} + c_2te^{t\alpha} & b^2 - 4ac = 0 \\ c_1e^{t\alpha_1} + c_2e^{t\alpha_2} & b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

al variare di  $c_1$  e  $c_2$  in  $\mathbf{R}$ , con  $\alpha \pm i\beta$ , ovvero  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$  radici di  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**Passo 2: principali metodi per la determinazione di una soluzione particolare**

Per tentativi

Coefficienti indeterminati per equazioni a coefficienti costanti

Se il termine noto è  $e^{\alpha t}(p_1(t) \cos \beta t + p_2(t) \sin \beta t)$ , si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^m e^{t\alpha} (q_1(t) \cos \beta t + q_2(t) \sin \beta t)$$

ove  $q_1$  e  $q_2$  sono polinomi con gradi minori del massimo di quelli di  $p_1$  e  $p_2$ , ed  $m$  molteplicità di  $\alpha \pm i\beta$ , come radici del polinomio associato all'equazione.

Variazione delle costanti Se  $u_1(t), u_2(t)$  danno una base dello spazio delle soluzioni dell'omogenea, si cercheranno soluzioni del tipo  $u^*(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$

- ci si riduce al sistema numerico ( $t$  è fisso)  $\begin{cases} u_1c'_1 + u_2c'_2 = 0 \\ u'_1c'_1 + u'_2c'_2 = \frac{f}{a} \end{cases}$  e quindi si trovano le primitive di  $c'_1, c'_2$ .