MATEMATICA

Anno Accademico 2005-2006 Scienze Geologiche

M.Novaga, V.M. Tortorelli

I prova in itinere, 6 dicembre 2005

I PARTE: SOLUZIONI

---

1 - Quante sono le funzioni iniettive da un insieme con cinque elementi ad uno con sette?

R.: **2520** per ogni sottoinsieme di 5 elementi dell'insieme di 7 vi sono 5! $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$ funzioni iniettive a valori in esso. poichè tali sottoinsiemi sono $\binom{7}{5}$ la risposta è
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

Allo stesso risultato si perviene ragionando direttamente: per il primo dei cinque elementi ho sette possibili scelte, per il secondo sei per il terzo cinque, per il secondo quattro e per l'ultimo tre.

2- Che conica descrive il luogo di zeri del polinomio $x^2 - xy + y^2 + x - 1$?

R.: **ellisse** la matrice dei coefficienti di secondo grado ha determinante positivo : $1 - \frac{1}{4}$. D'altronde la matrice completa simmetrcia con prima colonna data nell'ordine da termine noto e coefficienti di primo grado ha determinante $-1 + \frac{1}{4} - 1 < 0$.

In altro modo, per quadratura: il polinomio è eguale a
$(x - \frac{y}{2} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2\sqrt{3}})^2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$
che nelle coordinate $X = x - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$, $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ è una circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Ma traslando l'origine e dilatando uno degli assi si trasformano ellissi in ellissi.

3- Si calcoli l'area del triangolo di vertici $(1,1,0,1)$, $(1,2,3,1)$, $(4,1,0,5)$.

R.: $\mathbf{\frac{5}{2}\sqrt{10}}$ si traslano i tre vertici riportando il primo all'origine e i rimanenti due rispettivamente in $(0,1,3,0)$ e $(3,0,0,4)$: l'area in questione è la meta della radice quadrata del determinante della matrce due per due diagonale (diag 10, 25) ottenuta moltiplicando quella che ha come righe le coordinate $(0,1,3,0)$ e $(3,0,0,4)$ per la sua trasposta.

Altrimenti: si osserva che i due vettori traslati sono ortogonali qundi il triangolo è rettangolo e l'area è la metà del prodotto delle lunghezze dei cateti che sono i segmenti dall'origine a due punti identificati dai vettori traslati:$\frac{1}{2}\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{3^2+4^2}$.

4- Qual'è la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y + z - w = 0 \\ 2x - 3y + z - 2w = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 3w = 0 \end{cases}$?

R.: **2** la matrice associata al sistema omogeneo ha rango due, quindi l'immagine della relativa funzione lineare ha dimensione due, per cui il suo luogo di zeri (le soluzioni del sistema) ha dimensione quattro meno due.

Direttamente si risolve il sistema osservando che la terza equazione è ottenibile dalla somma delle prme due, e quindi dalla prima $x = w - z - y$ che sostituito nella seconda da $-z - 5y = 0$ e quindi tutte le soluzioni sono del tipo $(w - 6y, y, -5y, w)$ al variare dei due parametri (y, w)

5- Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme $\bigcup_{m\in\mathbf{N}} \bigcap_{n\in\mathbf{N}}]\frac{1}{n+m}; m+n[$.

R.: $+\infty, \mathbf{0}$ potendo esplicitare l'insieme in questione si procede come segue: fissato m si tratta prima di fare le intersezioni al variare di n degli intervalli $]\frac{1}{n+m}; m+n[$. Poichè al crescere di n $\frac{1}{n+m}$ decresce tendendo a $\frac{1}{m}$ mentre $m+n$ cresce tendendo all'infinito il primo intervallo è contenuto in tutti gli altri per cui l'intersezione è $]\frac{1}{1+m}; m+1[$. Facendo quindi l'unione al variare di m si ottiene la semiretta positiva senza estemi.

MATEMATICA

Anno Accademico 2005-2006 Scienze Geologiche

M. Novaga, V.M. Tortorelli

I prova in itinere, 6 dicembre 2005

II PARTE:traccia della soluzione

---

1. Si studi l'andamento del grafico della seguente funzione (ove definita) $f(x) = \dfrac{1-9x}{\sqrt{1+3x^3}}$.

- f è definita se la radice al denominatore è definita e non nulla, quindi quando $1+3x^3 \neq 0$ e $1+3x^3 \geq 0$ cioè $1+3x^3 > 0$ ovvero $x > -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
- f è positiva per $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < \frac{1}{9}$, si annulla solo in $\frac{1}{9}$, altrimenti è negativa.
- per $x > -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, x \to -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ il numeratore tende ad un limite finito positivo, mentre il denominatore positivo tende a 0. Quindi $f \to +\infty$.

Per $x \to +\infty$ raccogliendo al numeratore e al denominatore x e semplificando si ottiene $f(x) = \frac{x}{|x|}\frac{\frac{1}{x}-9}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+3x}}$
con questa espressione si osserva che il numeratore tende a -9 mentre il denominatore a $+\infty$. La funzione tende quindi a zero.
- per studiare gli intervalli di monotonia conviene studiare il segno della derivata prima essendo la funzione derivabile nel suo dominio:$f'(x) = \frac{-9\sqrt{1+3x^3}-(1-9x)\frac{1}{2}\frac{9x^2}{\sqrt{1+3x^3}}}{1+3x^3} = \ldots \frac{9}{2}\frac{3x^3-x^2-2}{(1+3x^3)^{\frac{3}{2}}}$
poichè il denominatore e positivo il segno della derivata prima è eguale a quello del numeratore $3x^3 - x^2 - 2$ polinomio a coefficienti razionali, per cui si può provare a cercarne radici tra i rapporti dei coefficienti estremi. In effetti 1 è radice.

Si ottiene $3x^3 - x^2 - 2 = (x-1)(3x^2+2x+2) = (x-1)(2x^2+2+(x+1)^2)$ che è positivo solo se $x > 1$ e si annulla solo per $x = 1$. Quindi la funzione decresce in $]-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1[$, cresce in $]1, +\infty[$. Pertanto 1 è punto di minimo e il valore minimo di f è -4.
- Conviene, nel caso, mettere in evidenza quali siano i coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico nei punti ove questo interschi gli assi coordinati.Osservando che $f(0) = 1$, in $(0;1)$ la retta tangente ha coefficiente $f'(0) = -9$. La retta tangente in $(0;1)$ è il grafico di $y = -9x+1$ che non solo passa dal punto del grafico $(0;1)$ ma anche dal punto $(\frac{1}{9};0)$. In $(\frac{1}{9};0)$ la tangente ha coefficiente $f'(\frac{1}{9}) = \frac{9}{2}(\frac{1}{9}-1)\frac{\frac{1}{27}+\frac{2}{9}+2}{(1+\frac{1}{3\cdot 81})^{\frac{3}{2}}} = -9\frac{244}{243}(1+\frac{1}{243})^{-\frac{3}{2}} = -9\sqrt{\frac{243}{244}} > -9$.

- Lo studio degli intervalli di convessità non era richiesto. Una risposta parziale può essere:
$f''(x) = \ldots = \frac{9}{4}\frac{2x(9x-2)(1+3x^3)-27x^2(x-1)(3x^2+2x+2)}{(1+3x^3)^{\frac{5}{2}}} = \frac{9}{4}\frac{x(-27x^4+15x^3+72x-4)}{(1+3x^3)^{\frac{5}{2}}}$
essendo il secondo addendo del numeratore positivo per $x < 1$ si ottiene che per $x < 0$ la derivata seconda è positiva. Quindi sull'intervallo $]-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0]$ la funzione è convessa. In particolare su questo intervallo il grafico sta sopra la retta tangente in $(0,1)$: $y = -9x+1$.

Si osserva anche che $f''(0) = 0$ ed un' analisi qualitativa mostra che per $x > 0$ abbastanza piccolo invece $f''(x) < 0$. Infatti $-27x^4 + 15x^3 + 72x - 4$ è continua in 0 ed ivi vale -4 e per permanenza del segno rimarrà negativa in un intervallo $]0;\varepsilon[$ Cioè $x = 0$ è punto di flesso.Quindi in un intervallo $]0;\varepsilon[$ il grafico sta sotto la retta tangente data da $y = -9x+1$.

Infine poichè $f''(\frac{1}{9}) = \frac{9}{4}\frac{-\frac{2}{9}\frac{244}{243}+\frac{27}{81}2\frac{244}{243}}{\ldots} > 0$ in $[\varepsilon, \frac{1}{9}[$ vi è **almeno** un altro flesso. D'altronde il numeratore di f'' è $x(-27x^4+15x^3+72x-4)$, crescente in $[\frac{1}{9}, 1]$ poichè ivi $-27\cdot 4x^3 + 3\cdot 15x^2 + 72 > 0$. Qui f sarà convessa. Infine vi sarà **almeno** un altro flesso per $x > 1$: f ha asintoto orizzontale e non può stare sempre sopra le sue tangenti in $]1;+\infty[$. Si noti che non possono però esserci più di cinque flessi. Vi sonosolo due possibili andamenti della convessità di f.