Matematica, Anno Accademico 2003-2004, Scienze Geologiche
V.M. Tortorelli

IV foglio di esercizi: P.Acquistapace, V.M. Tortorelli
dal 28 ottobre 2003 al 30 ottobre 2003

Programma e materiale relativo al corso essere reperito in rete selezionando nella Pagina del Dipartimento la voce Materiale Didattico (http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html) e quindi selezionando ALTRI CORSI DI LAUREA e Corso di laurea *****

ESERCIZIO n. 1 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e come funzione delle coordinate (x, y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni affini dal piano in se:
- simmetria rispetto al punto $(1, 2)$
- simmetria rispetto alla generica retta passante per l'origine
- simmetria rispetto alla retta passante per $(2, 3)$ e parallela a $(3, 4)$
- rotazione di un ottavo di 'angolo giro' attorno al punto $(4, 5)$

ESERCIZIO n. 2 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e come funzione delle coordinate (x, y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni affini dal piano in se:
- la dilatazione di centro $(1, 1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$;
- la dilatazione anisotropa di centro $(1, 1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$ nella direzione $(1, 2)$ e fattore 2 nella direzione $(2, 1)$.

ESERCIZIO n. 3 A che trasformazioni del piano corrsipondono le seguenti funzioni
- $(x, y) \mapsto (-y, x)$
- $(x, y) \mapsto (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1)$
- $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$

ESERCIZIO n. 4 Date due rette nel piano che trasformazione si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad una di esse e quindi la simmetria rispetto la seconda?
- Scambiando l'ordine di queste simmetrie quando si ottiene lo stesso risultato?

ESERCIZIO n. 5 Riconoscere che tipo di coniche definiscono rispettivamente i seguenti luoghi di zeri:
$x^2+y^2+2xy = 0$, $xy = 1$, $(x-y)^2 = (x+y)^2$, $x^2+y^2-6xy-x+4 = 0$, $xy-23y+8y-1 = 0$, $3x^2 + 2y^2 - 3xy + x + y - 100 = 0$.

ESERCIZIO n. 6 Verificare che:
- un ellisse è il luogo dei punti con somma delle distanze da due punti fissi costante;
- un iperbole è il luogo dei punti con differenza delle distanze da due punti fissi costante;
- una parabola è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa e da un punto fisso.

Osservazione: si può verificare dando la nozione di tangenza che se una retta interseca una conica non degenere in un sol punto è ad essa tangente in quel punto.

Definizione: Si dice cammino di riflessione rispetto ad una retta per un suo punto l'unione di due semirette (lati) con origine nel punto e simmetriche rispetto all'asse perpendicolare alla retta nel punto.

- Un cammino di riflessione rispetto ad un insieme in un suo punto è un cammino di riflessione rispetto all'eventuale retta tangente all'insieme dato in questo suo punto.

ESERCIZIO n. 7 Verificare che:

- i cammini di riflessione rispetto ad una parabola con un lato parallelo all'asse della stessa hanno l'altro che passa per il fuoco della parabola;
- i cammini di riflessione rispetto ad un'elisse che hanno un lato che passa per un fuoco hanno il secondo lato che passa per l'altro fuoco;
- i cammini di riflessione rispetto ad un iperbole che hanno un lato passante per un fuoco hanno prolungamento del secondo lato passante per l'altro fuoco.

ESERCIZIO n. 8 Una trasformazione che manda ogni retta in un'altra retta parallela alla prima e non lascia nessun punto fisso del piano è una traslazione.

- Una trasformazione che manda ogni retta in un'altra retta parallela alla prima e lascia un punto del piano fisso è una dilatazione rispetto adun punto.

-Dati due segmenti paralleli quante sono le traslazioni e le dilatazioni che trasformano uno nell'altro?

-Dati quattro punti $a \neq b$, $\alpha \neq \beta$ mostrare che vi è un'unica traslazione o dilatazione che trasforma a in α e b in β.

ESERCIZIO n. 9 Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari che trasformano $x^2+y^2=1$ in se?

-Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari che trasformano $|x|+|y|=1$ in se?

-Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari che trasformano $x^2+4y^2+4xy+x+y+1=0$ in se?

ESERCIZIO n. 10** Si identifichi il piano con $\mathbf{R}^2$. Le trasformazioni T bigettive del piano che mandano rette in rette sono tutte e sole le trasformazioni affini ($T(x,y)-T(0,0)$ è lineare) e bigettive.

ESERCIZIO n. 11** Le trasformazioni del piano che conservano le distanze sono affini e la loro parte lineare è data da matrici con colonne ortogonali di norma 1, che rappresentano rotazioni e riflessioni.

ESERCIZIO n. 12 Si trovi la distanza del punto $(1,1,1)$ dal piano $x+y+z=0$.

ESERCIZIO n. 13 Quali regioni dello spazio vengono trasformate in se stesse solamente da tutte rotazioni rispetto ad una retta passante per l'origine?

- Quali regioni dello spazione vengono trasformate in se stesse da tutte le simmetrie rispetto ai piani coordinati?