G. ALBERTI, V.M. TORTORELLI

Schema della lezione del 30 Ottobre 2013 (pomeriggio)

V.M. Tortorelli

BASI PER I PROBLEMI DI CONTEGGIO
FORMULE DI NEWTON E LEIBNIZ.

In quanto segue espongo dei problemi di conteggio, le loro interpretazioni astratte, altre loro interpretazioni.

PRIMO PROBLEMA (con "parola" si intende una lista ordinata)

Quante "parole" posso scrivere con k tra n simboli?

Esempio $k=4, n=3$: 4 è il numero dei simboli che si usano eventualmente ripetendoli, è quindi il numero dei posti ordinati della parola; 3 è il numero dei simboli che posso usare diciamo A, B, C:

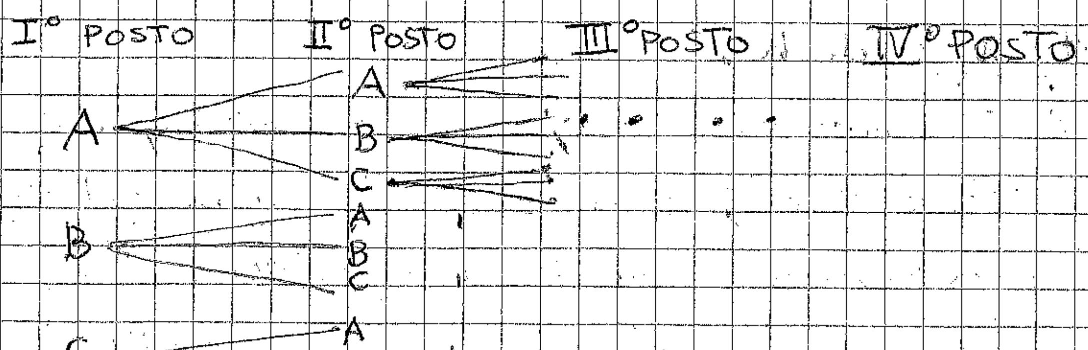
al primo posto ho tre possibilità: o metto A o B o C,

per ognuna di queste scelte al secondo posto ne ho altre tre,

per ognuna di queste scelte per i primi due posti (che sono 9) al terzo posto ne ho altre tre,

per ognuna di queste scelte per i primi tre posti (che sono $3\cdot 3\cdot 3 = 9\cdot 3 = 27$) ho altre tre scelte per l'ultimo posto.

In tutto $3\cdot 27 = 3^4 = 81$ scelte cioè 81 parole che posso scrivere.



In generale la risposta al problema è, con stesso ragionamento, n^k : DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE.

PRIMO PROBLEMA INTERPRETAZIONE ASTRATTA

n^k è il numero delle funzioni $f: \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$

ALTRE INTERPRETAZIONI:

- in quanti modi posso distribuire k oggetti diversi ad n persone diverse?

- interpretazione "complicata"
  quali sono i possibili risultati di n estrazioni ordinate, possibilmente non estraendo nulla in alcune di esse, da un'urna con k oggetti distinti in modo che alla fine ho comunque estratto tutti i k oggetti?

* - interpretazione standard. (ESTRAZIONI CON REIMBUSSOLAMENTO)
  quali sono i possibili risultati di k estrazioni ordinate da un'urna con n oggetti distinti, estraendo ogni volta esattamente un oggetto e poi rimettendolo nell'urna per l'estrazione successiva?

Si noti che tra l'interpretazione "complicata" e l'interpretazione standard si scambiano i ruoli di n e di k.

Lette in modo astratto, con le funzioni, le due ultime interpretazioni, si ha che nella prima interpretazione un'estrazione è uno dei possibili valori tra $\{1, \dots, n\}$ della funzione e gli oggetti in essa estratti gli elementi di $\{1, \dots, k\}$ che assumono quel valore per la funzione.

SECONDO PROBLEMA (DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE)

Quante parole posso scrivere con k diversi tra n simboli?

Chiaramente se $k \gneq n$ la risposta è 0.

Se $k \leq n$ si ragiona come nel primo problema:

per il primo posto ho n possibili scelte,
per il secondo posto, visto che non posso ripetere il simbolo che ho messo al primo posto, ho solo $n-1$ scelte
per il terzo posto, avendo fatte le scelte per il primo e il secondo posto che sono $n\cdot(n-1)$, ho solo $n-2$ scelte non potendo ripetere le prime due.
Così procedendo all'ultimo posto ho solo da poter fare $n-(k-1)$ scelte avendo già scelto $k-1$ simboli. In tutto si son fatte $D(n,k) =_{def.}$
$= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ scelte.

INTERPRETAZIONE ASTRATTA

$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ è il numero delle funzioni $f:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,n\}$ INIETTIVE

ALTRE INTERPRETAZIONI.

- in quanti modi posso distribuire k oggetti diversi ad n persone diverse, dandone al più uno?
- interpretazione "complicata",
quali sono i possibili risultati di n estrazioni ordinate al più un oggetto tra i k oggetti distinti in un'urna in modo che alla fine ho comunque estratto tutti i k oggetti?

*. interpretazione standard (ESTRAZIONI SENZA REIMBUSSOLAMENTO)
quali sono i possibili risultati di k estrazioni ordinate da un'urna con n oggetti distinti estraendo un oggetto alla volta senza poi rimetterlo nell'urna?

IL FATTORIALE (PERMUTAZIONI)

Nel problema delle disposizioni senza ripetizione ha interesse il caso in cui $k=n$:

- quante parole "lunghe n" posso scrivere con n simboli?
- quante sono le funzioni bijettive $f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$? (PERMUTAZIONI)
- quali sono i possibili modi per compilare un elenco con n parole?

etc. etc.

La risposta $n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-k+1) \overset{k=n}{=} n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1 =$

$= D(n,n)$ si dice fattoriale di n e si indica con $n!$.

Si osservi che $D(n,k) = n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Si pone $0! = 1$ (c'è solo la parola "VUOTA")

Esempio

quanti sono i possibili anagrammi di STUDIO (comprendendo la parola scritta):

essendo le 6 lettere diverse, una per posto, la risposta è $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$.

Esempio riassuntivo:

Tra 5 amici che probabilità c'è che almeno due tra di essi siano nati lo stesso giorno della settimana?

$$\text{PROBABILITÀ} = \frac{\text{NUMERO CASI FAVOREVOLI}}{\text{NUMERO CASI POSSIBILI}} = \frac{7^5 - 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{7^5} = \frac{7^4 - 6\cdot5\cdot4\cdot3}{7^4}$$

i casi possibili sono le associazioni ad ognuno dei 5 amici del giorno della settimana in cui è nato; sono 7^5

i casi favorevoli son quelle associazioni in cui almeno un giorno compare più di una volta, ovvero in cui vi è una ripetizione. Essendo i casi non favorevoli quelli in cui non vi sono ripetizioni, in numero $D(7,5) = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$ i rimanenti favorevoli sono $7^5 - 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$.

TERZO PROBLEMA (COMBINAZIONI SEMPLICI, SENZA RIPETIZIONE)

Quante parole "lunghe n" posso scrivere ripetendo esattamente K volte uno tra due simboli a disposizione?

INTERPRETAZIONE ASTRATTA

Quanti sono i sottoinsiemi con K elementi di un insieme con n elementi?

ALTRE INTERPRETAZIONI

- in quanti modi posso distribuire **K** oggetti eguali ad **n** persone diverse, dandone al più uno?
- in quanti modi posso occupare K tra n posti distinti?
- * quali sono i possibili risultati di K estrazioni, senza distinguere una dall'altra, da un'urna con n oggetti distinti, estraendo un oggetto alla volta senza poi rimetterlo nell'urna?

Esempio: $K=3$, $n=5$

si parte da una scelta di 3 su 5 posti:

1 2 3 4 5

ad esso corrispondono le seguenti disposizioni di 3 oggetti distinti diciamo A, B, C nei 5 posti

A B C	B C A
A C B	C A B
B A C	C B A

quindi per ogni scelta dei 3 posti corrispondono le $3! = 6$ disposizioni di 3 oggetti distinti in quei posti.

Quindi i modi di scegliere 3 posti su 5 sono =

$$= \frac{D(5,3)}{3!} = \frac{5!}{2!\,3!}$$

RISPOSTA il procedimento si fa in generale: se scelgo K posti su n in quei K posti posso mettere in $K!$ modi diversi K oggetti diversi. Quindi

NUMERO DELLE COMBINAZIONI SEMPLICI DI K SU $n = \frac{D(n,K)}{K!} = \frac{n!}{(n-K)!\,K!} \underset{\text{DEF}}{=} C(n,K)$.

COEFFICIENTI BINOMIALI

dati due numeri naturali K ed n si definisce

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} C(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} & \text{se } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{se } k > n \text{ o } k < 0 \end{cases}$$

- dalla definizione si ottiene subito la relazione

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

d'altronde scegliere k elementi su n equivale a scegliere "in negativo" i rimanenti $n-k$.

- Per un calcolo "ricorsivo" è interessante trovare una relazione tra un coefficiente binomiale e quelli con indici minori

una notevole segue da questo ragionamento detto "del testimone":

- tra gli n elementi ne scelgo uno, diciamo P;
- questo mi dà un criterio per dividere in due "classi" i sottoinsiemi dell'insieme con n elementi

B_P = i sottoinsiemi che hanno P come elemento C_P = i sottoinsiemi che non hanno p come elemento

- questa divisione vale in particolare per i sottoinsiemi con K+1 elementi

quelli che sono in B_p sono $\binom{n-1}{k}$: oltre a P hanno altri K elementi scelti tra gli $n-1$ diversi da P

quelli che sono in C_p sono $\binom{n-1}{k+1}$: tutti i loro K+1 elementi sono presi tra gli $n-1$ diversi da P

Concludendo

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}$$

COEFFICIENTI MULTINOMIALI ED ANAGRAMMI
(accennato a lezione)

. quanti sono gli anagrammi di
GESTIONALE ?
è una parola con 10 caratteri, ma uno di essi, la E, è ripetuto 2 volte.
Per fare il conteggio si può ragionare come segue:

prima scelgo dove mettere le 2 E, scelgo 2 posti su 10:
posso farlo in $\binom{10}{2}$ modi.
per ognuna di queste scelte devo mettere nei rimanenti 8 posti i rimanenti 8 caratteri diversi (GSTIONAL):
quindi 8! possibilità.
La risposta è quindi $\binom{10}{2} 8! = \frac{10!}{\cancel{8!}\,2!} \cancel{8!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

. quanti sono gli anagrammi di
INGEGNERE
ho 9 posti che devo assegnare come segue:
3 E, 2 G, 2 N, 1 I, 1 R

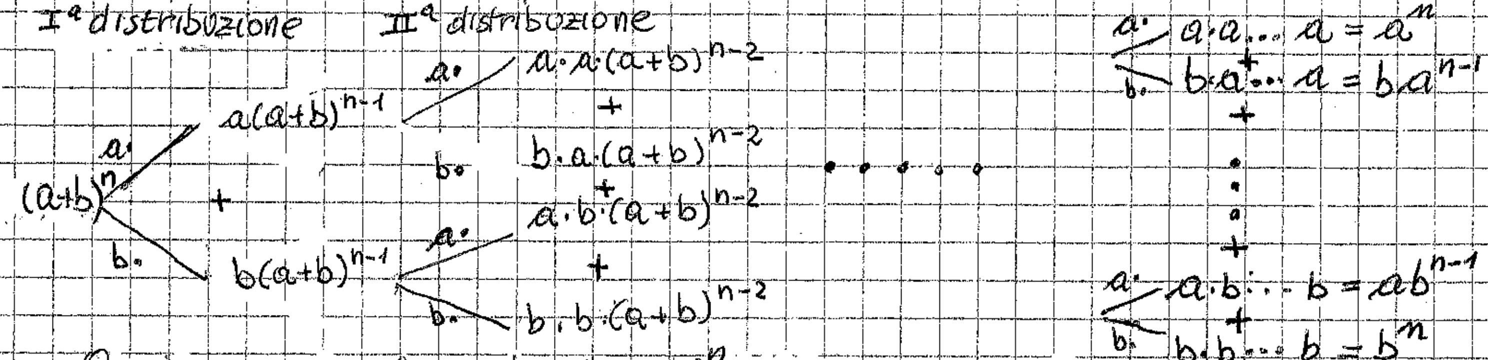
scelgo i 3 posti delle E: $\binom{9}{3}$ casi
tra i 9-3 rimanenti i 2 delle G: $\binom{9-3}{2}$ casi
tra i 9-3-2 rimanenti i 2 delle N: $\binom{9-3-2}{2}$ casi
tra i 9-3-2-2 rimanenti l'1 posto della I: $\binom{9-3-2-2}{1}$
tra i 9-3-2-2-1 rimanenti l'1 posto della R: $\binom{9-3-2-2-1}{1}$
la risposta è

$$\binom{9}{3}\binom{9-3}{2}\binom{9-3-2}{2}\binom{9-3-2-2}{1}\binom{9-3-2-2-1}{1} =$$

$$= \frac{9!}{3!\,\cancel{(9-3)!}} \cdot \frac{\cancel{(9-3)!}}{2!\,\cancel{(9-3-2)!}} \cdot \frac{\cancel{(9-3-2)!}}{2!\,\cancel{(9-3-2-2)!}} \cdot \frac{\cancel{(9-3-2-2)!}}{1!\,\cancel{(9-3-2-2-1)!}} \cdot \frac{\cancel{(9-3-2-2-1)!}}{1!\;\;0!} = \frac{9!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!}$$

LE FORMULE DI NEWTON E LEIBNIZ.

Newton: si tratta di sviluppare come somma $(a+b)^n$.
Lo si vede come $(a+b)\cdot(a+b)^{n-1} = a\cdot(a+b)^{n-1} + b(a+b)^{n-1}$
Si ripete la <u>distribuzione</u> dei due addendi a e b ad ogni moltiplicazione per $(a+b)$.
Ad ogni moltiplicazione per $(a+b)$ raddoppio, per distributività, gli addendi. Alla fine avrò 2^n addendi: del tipo "n successive moltiplicazioni o per a o per b".



Ogni cammino che parte da $(a+b)^n$ arriva ad un addendo finale.
Un cammino fatto partendo da $(a+b)^n$ per arrivare ad uno degli addendi finali è individuato dalle distribuzioni in cui decido di moltiplicare per a. Nel disegno moltiplicare per a è andare "in su".

Quindi gli addendi finali in cui a compare (come fattore) esattamente k volte (usando la proprietà commutativa quelli uguali ad $a^k b^{n-k}$) sono tanti quante le scelte di andare k volte "all'in su" in un cammino lungo n "tratti" (ovvero le scelte di distribuire k volte l'addendo a sulle n distribuzioni): cioè $\binom{n}{k}$.

Pertanto

$$(a+b)^n = \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{0}b^n =$$

$$= a^n + n\,a^{n-1}b + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + n\,a\,b^{n-1} + b^n =$$

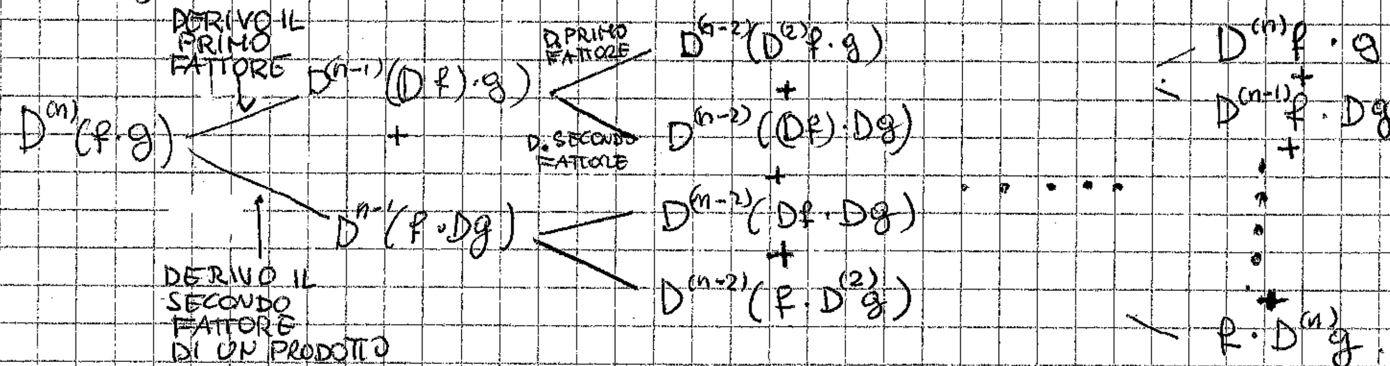
$= \text{Somma} \binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ per k tra 0 ed n compresi.

Leibniz: si tratta di sviluppare come somma $D^{(n)}(f \cdot g)$. (indico con D fare la derivata, con $D^{(0)}$ non fare la derivata cioè $D^{(0)} f = f$, con $D^{(h)}$ fare h derivate successivamente).

Si riconosce lo schema di distributività usato per lo sviluppo di Newton (in versione più semplice)

$$D^{(n)}(f \cdot g) = D^{(n-1)} D(f \cdot g) = D^{(n-1)}((Df) \cdot g + f \cdot (Dg))$$

Ogni derivata mi raddoppia gli addendi e si "distribuisce" sul primo o sul secondo fattore degli addendi presenti che sono prodotti di due funzioni.



Come prima ognuno dei 2^n addendi finali è individuato da un cammino di n "tratti".

I tratti "all'insù" son quelli ove scelgo di derivare il primo fattore di un prodotto del tipo $D^{(k)} f \cdot D^{(h)} g$, incrementando <u>solo le derivate di f</u>.

Quindi gli addendi finali ove f compare derivata k volte, del tipo $D^{(k)} f \, D^{(n-k)} g$, sono tanti quante le scelte di "andare all'insù" in un cammino "lungo n tratti": cioè $\binom{n}{k}$.

$$D^{(n)}(f \cdot g) = \binom{n}{n} D^{(n)} f g + \binom{n}{n-1} D^{(n-1)} f \, Dg + \dots + \binom{n}{1} Df \cdot D^{(n-1)} g + \binom{n}{0} f D^{(n)} g$$

$$= D^{(n)} f \cdot g + n D^{(n-1)} f \, Dg + \dots + n \, Df \cdot D^{(n-1)} g + f \cdot D^{(n)} g =$$

$$= \text{Somma} \binom{n}{k} D^{(k)} f \, D^{(n-k)} g \quad \text{per } k \text{ tra } 0 \text{ e } n \text{ compresi.}$$